Quelques structures algébriques ordonnées
Cours de 3ème cycle 1994–95

Friedrich Wehrung

CNRS, ESA 6081, Université de Caen, Campus II, Département de Mathématiques, B.P. 5186, 14032 CAEN cedex, FRANCE

E-mail address: wehrung@math.unicaen.fr

URL: http://www.math.unicaen.fr/~wehrung

Abstract. Ce cours propose de donner une initiation à un certain nombre de structures ordonnées classiques en insistant autant sur le point de vue *algébrique* que sur le point de vue *ensembliste*. Des axiomes centraux dans l'étude de ces objets seront la *propriété de raffinement fini*, apparentée à la *propriété de décomposition de Riesz* ou à la *propriété d'interpolation*. Une grande partie du cours sera consacrée à une étude des structures classiques comme les groupes abéliens totalement ordonnés (théorème de plongement de Hahn...), algèbres de Boole, treillis, groupes réticulés (polaires, représentations, problèmes de mots...), espaces vectoriels ordonnés..., avec des exemples naturels dans les mathématiques plus "classiques". Ce cours est accompagné d'exercices de difficulté variable, ainsi que d'une bibliographie.

Table des matières

Introduction v

Chapitre 1. Axiome du choix, Théorème de Tychonoff, Théorème de Hahn-Banach 1
Exercices du Chapitre 1 11
Notes du Chapitre 1 19

Chapitre 2. Treillis, algèbres de Boole; Théorème de Stone 21
Exercices du Chapitre 2 31

Chapitre 3. Transition; treillis pseudo-complémentés 41
Exercices du Chapitre 3 46

Chapitre 4. Algèbres de Boole complètes; Théorème de prolongement de Sikorski 49
Exercices du Chapitre 4 58

Chapitre 5. Propriété de raffinement. Semi-groupes, monoïdes et groupes ordonnés 65
Exercices du Chapitre 5 76

Chapitre 6. Groupes réticulés: une introduction 83
Exercices du Chapitre 6 95

Chapitre 7. Groupes réticulés représentables; groupes totalement ordonnés 99
Exercices du Chapitre 7 108

Chapitre 8. Groupes réticulés complets; Théorème d'Iwasawa 113
Exercices du Chapitre 8 123

Chapitre 9. Groupes d'interpolation, groupes de dimension; Théorème d'Effros, Handelman, et Shen 127
Exercices du Chapitre 9 146

Chapitre 10. Monoïdes commutatifs positivement préordonnés et leur dualité 153
Exercices du Chapitre 10 163

Chapitre 11. Monoïdes ordonnés de types de décomposition 169
Exercices du Chapitre 11 181

Examen de Janvier 1995 189

Examen de Septembre 1995 193

Examen de Décembre 1996 197

Examen de Septembre 1997 201

Bibliographie 205

Introduction

Le but de tout ceci est de présenter un panorama de certaines structures ordonnées de base. Une telle tâche serait impossible dans un volume aussi restreint si l'on voulait être suffisamment complet et ne pas omettre les structures les plus importantes, aussi ai-je dû faire un choix parmi ces structures, ce choix étant sans aucun doute déterminé par ma propre orientation mathématique.

La progression se fera en général des objets les plus faciles à structurer (algèbres de Boole...) vers les moins faciles à structurer (monoïdes ordonnés...). Aussi sera-t-on souvent confronté au problème fascinant d'étendre les théorèmes de structure obtenus pour les objets "structurés", problème qui pourra éventuellement ne pas trouver de solution; mais parfois aussi, de façon peut-être surprenante, le passage à des objets plus généraux (de langage moins riche) permettra de démontrer de nouveaux théorèmes de structure, absents du cas le plus structuré. Dans cette direction, un exemple que je trouve frappant est celui du théorème de Grillet et Effros, Handelman, et Shen pour les groupes de dimension (Chapitre 9), pour lequel il n'existe pas d'analogue à ce jour pour les groupes abéliens réticulés, qui forment une classe pourtant plus restreinte (mais au langage plus riche).

Mais assez parlé, voici un court résumé, chapitre par chapitre, du texte qui va suivre.

- Le Chapitre 1 est un chapitre d'introduction, qui ne présente pas de nouvelles structures, mais plutôt des *outils* essentiels et d'ailleurs non spécialisés à l'étude des structures algébriques ordonnées. J'ai choisi en fait trois de ces outils, à mon sens les plus importants: *l'axiome du choix* AC, *le Théorème de Tychonoff* PIT et *le Théorème de Hahn-Banach* HB. L'axiome du choix est équivalent aux principes apparemment beaucoup plus puissants que sont le Théorème de Zermelo et le Lemme de Zorn, et les deux principes restants, PIT et HB, sont deux formes du Lemme de Zorn très souvent utilisées dans l'étude de beaucoup de structures, ordonnées ou pas. Les implications entre ces principes sont AC$\Rightarrow$PIT$\Rightarrow$HB, implications d'ailleurs non réversibles. Afin de ne pas alourdir la présentation, je ne parlerai pas d'autres principes de choix souvent utilisés, le plus connu étant peut-être le principe des choix dénombrables dépendants DC.
- Le Chapitre 2 est une introduction aux objets importants que sont les *algèbres de Boole*, en passant par les treillis distributifs. Parmi les résultats basiques, un résultat important est l'équivalence entre les algèbres de Boole et les *anneaux de Boole* (Proposition 2.7), *i.e.* les anneaux unitaires satisfaisant l'identité $x^2 = x$. Ces anneaux sont nécessairement commutatifs, ce qui permet "d'importer" les résultats et méthodes de l'algèbre commutative pour l'étude des algèbres de Boole. Cependant, pour démontrer

le Théorème de représentation de Stone, nous utiliserons les ultrafiltres plutôt que les idéaux maximaux, d'une part pour utiliser l'analogie avec les ultrafiltres introduits dans le Chapitre 1, d'autre part pour donner une forme *positive* à la correspondance

(points)↔(ultrafiltres), (fermés)↔(filtres), (ouverts-fermés)↔(éléments).

Cette correspondance est à la base de la démonstration du *Théorème de représentation de Stone*, qui est d'une part une forme équivalente de PIT, d'autre part un outil puissant qui permet de transformer tout raisonnement sur les algèbres de Boole en un raisonnement topologique, car il entraîne que toute algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre de Boole des ouverts fermés d'un certain espace topologique compact dont la topologie admet une base d'ouverts fermés—on dit un "espace topologique booléen".

- Le Chapitre 3 est un court chapitre de transition, qui introduira une certaine généralisation des algèbres de Boole, les *algèbres de Heyting*, en fait une généralisation de ces dernières, les *treillis pseudo-complémentés*. Son but essentiel est de donner une généralisation "abstraite" de la construction de l'algèbre des ouverts réguliers donnée dans le Chapitre 4, et de familiariser avec la notion de pseudo-complément. Ce chapitre sera utilisé lors de l'étude des groupes réticulés, à partir du Chapitre 6.
- Le Chapitre 4 étudie les *algèbres de Boole complètes*. Pour tout ensemble X, $\mathfrak{P}(X)$ est une algèbre de Boole complète, mais c'est un cas particulier très spécial, dit des *algèbres de Boole complètes atomiques*. D'autres exemples sont l'algèbre de Boole des boréliens de $[0, 1]$ modulo les ensembles maigres, ou bien l'algèbre de Boole des parties mesurables de $[0, 1]$ modulo les parties de mesure nulle. Un exemple encore plus général est celui de l'algèbre de Boole des *ouverts réguliers* d'un espace topologique arbitraire (Théorème 4.3). Cet exemple est en fait si général que toute algèbre de Boole se plonge dans l'algèbre des ouverts réguliers d'un espace topologique, et toute algèbre de Boole complète est isomorphe à l'algèbre des ouverts réguliers d'un espace topologique (Théorème 4.5). Enfin, le *Théorème de prolongement de Sikorski* (Théorème 4.8) est une version plus puissante de PIT (et, en fait, strictement plus puissante) qui dit que les algèbres de Boole complètes sont exactement les algèbres de Boole *injectives* (au sens catégorique du terme).
- Le Chapitre 5 est une introduction à la théorie des *semi-groupes*, *monoïdes* et *groupes ordonnés*, ainsi qu'à la très utile *propriété de raffinement* dont l'importance ira en croissant au fur et à mesure que l'on avancera. Parmi les groupes ordonnés, nous rencontrerons les groupes *dirigés*, *non perforés*, *archimédiens*, *intégralement clos* (cette dernière propriété étant une forme forte de propriété archimédienne, et on dit d'ailleurs parfois "archimédien" au lieu de "intégralement clos"). Une construction sans analogue en théorie des groupes (non ordonnés) est celle de *produit lexicographique*, qui sert à trouver des contrexemples non triviaux mais aussi à démontrer des théorèmes de structure sur certains groupes ordonnés. Nous montrerons également qu'un groupe abélien est totalement ordonnable si et seulement si il est sans torsion.

- Le Chapitre 6 est une introduction à l'étude d'une importante classe de groupes ordonnés, dont la théorie, contrairement à celle des groupes ordonnés, est *algébrique*, celle des *groupes réticulés*. Tout groupe réticulé est caractérisé par son cône positif, qui satisfait nécessairement la propriété de raffinement, ce qui n'est cependant *pas* une caractérisation des groupes réticulés. Cette théorie présente de très nombreuses analogies formelles avec la théorie des groupes; ainsi, les propriétés élémentaires des sous-groupes (resp. sous-groupes distingués) en théorie des groupes sont similaires à celles des sous-groupes solides (resp. ℓ-idéaux) en théorie des groupes réticulés. Mais, alors que le treillis des sous-groupes d'un groupe quelconque (même abélien) peut ne pas être distributif, même dans des cas très simples, le treillis des sous-groupes solides d'un groupe réticulé est distributif, c'est même une *algèbre de Heyting complète* (Corollaire 6.22), ce qui renvoie au Chapitre 3; les groupes réticulés sont donc basiquement beaucoup plus faciles à structurer que les groupes en général. Il ne faut pas cependant croire que les théorèmes sur les groupes réticulés sont systématiquement plus faciles à démontrer que ceux sur les groupes. Ainsi, le *Théorème de Holland* (Théorème 6.29), qui est l'analogue du Théorème de Cayley pour les groupes ("tout groupe est isomorphe à un groupe de permutations"—*i.e.*, un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_X$ des permutations de X pour un certain ensemble X), demande-t-il une analyse plus profonde de la structure des groupes réticulés (sous-groupes premiers, valeurs). Son résultat est que tout groupe réticulé se plonge dans le groupe réticulé des permutations d'une chaîne (analogue pour les groupes réticulés des groupes de permutations). Ce résultat peut être en particulier utilisé pour démontrer la décidabilité du problème des mots dans les groupes réticulés libres; mais notons cependant que Glass et Gurevich ont trouvé un exemple de groupe réticulé finiment présenté au problème de mots indécidable.
- Dans le Chapitre 7, nous verrons une classe importante de groupes réticulés, les groupes réticulés *représentables*, *i.e.* ceux qui peuvent se plonger dans un produit de groupes *totalement ordonnés*. Les groupes réticulés représentables sont caractérisés par une identité simple (Théorème 7.5), trivialement satisfaite par les groupes abéliens réticulés: ainsi obtenons-nous en particulier que tout groupe abélien réticulé se plonge dans un produit de groupes [abéliens] totalement ordonnés. Ceci nous ramène à l'étude des groupes totalement ordonnés. Concernant ces derniers, l'un des résultats les plus basiques est le Théorème de Hölder (Théorème 7.7), qui dit que tout groupe totalement ordonné archimédien est commutatif, et en fait est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +, 0, \leq)$. On en déduit alors que *dans un groupe réticulé représentable, les commutateurs sont "petits"* (Théorème 7.13). Il est à noter que ceci n'est *pas* une caractérisation des groupes réticulés représentables. Enfin, nous donnerons une classe importante de groupes abéliens totalement ordonnés, les *puissances de Hahn* de $\mathbb{R}$, l'idée de base de leur construction étant d'ajouter des "infiniment petits" à la droite réelle par extensions lexicographiques itérées le long d'une *chaîne* donnée.
- Dans le Chapitre 8, nous commençons par déduire des résultats du chapitre précédent le *Théorème d'Iwasawa* (Théorème 8.3), qui dit que tout

groupe réticulé *complet* (*i.e.* dans lequel toute partie non vide majorée admet une borne supérieure) est *commutatif*. Par suite, tout groupe ordonné qui se plonge (comme groupe ordonné) dans un groupe réticulé complet est également commutatif, ce qui amène à se poser la question de savoir quels groupes ordonnés se plongent dans un groupe réticulé complet. Le plongement s'obtiendra de façon similaire à celle utilisée dans le procédé de complétion d'une algèbre de Boole vu au Chapitre 4, et est basiquement l'une des manières standard d'obtenir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, celui des *coupures de Dedekind*. Ce plongement aura également des propriétés d'unicité similaires à celles du Chapitre 4. Ce que l'on obtiendra à l'arrivée ne sera pas toujours un groupe réticulé complet: ce ne sera le cas que quand le groupe de départ sera *dirigé* et *intégralement clos*. Ainsi obtenons-nous le résultat non trivial que *tout groupe ordonné dirigé et intégralement clos est commutatif*. Nous conclurons ce chapitre en montrant deux propriétés du premier ordre satisfaites par les groupes réticulés complets mais pas par les groupes abéliens réticulés quelconques: d'une part la "division euclidienne" par tout entier naturel non nul, d'autre part la décomposition de tout groupe réticulé complet en groupe réticulé complet *divisible* et en groupe réticulé complet *singulier*.

- Passons maintenant au Chapitre 9. Nous avons mentionné précédemment que pour un groupe ordonné, la satisfaction de la propriété de raffinement par le cône positif ne caractérise pas les groupes réticulés. En fait, même pour les groupes abéliens ordonnés dirigés, ce n'est pas une caractérisation: aussi appelle-t-on les groupes abéliens ordonnés dont le cône positif satisfait la propriété de raffinement les *groupes d'interpolation*. S'ils sont de plus dirigés, ce sont des *groupes de Riesz* et s'ils sont de plus non perforés, ce sont des *groupes de dimension*. Tout groupe abélien réticulé est un groupe de dimension, mais des exemples très simples et naturels montrent que la réciproque est fausse. Parmi les groupes de dimension, les plus évidents sont les *groupes simpliciaux*, qui sont simplement les groupes ordonnés $\mathbb{Z}^n$ (n entier naturel) avec leur ordre naturel. Le Théorème d'Effros, Handelman, et Shen dit que les groupes simpliciaux suffisent à obtenir tous les groupes de dimension: plus précisément, *les groupes de dimension sont exactement les limites directes de groupes simpliciaux*. Comme application, pour résoudre un système d'équations et d'inéquations dans tous les cônes positifs de tous les groupes de dimension, il suffit de le faire dans $\mathbb{N}$ (et la preuve du Théorème d'Effros, Handelman, et Shen fournit un algorithme).
- C'est dans le Chapitre 10 que nous trouverons les objets les plus généraux, que nous (re-) baptisons ici les po^+-monoïdes. Par définition, un po^+-monoïde est un monoïde commutatif préordonné (le préordre est donc compatible avec l'addition) dans lequel tout élément est positif. Typiquement, si G est un groupe abélien ordonné, alors le cône positif G^+ de G est un po^+-monoïde, mais c'est aussi le cas pour $G^+ \cup \{\infty\}$. Une grande partie de ce chapitre sera consacrée à montrer des exemples de po^+-monoïdes, provenant de préoccupations différentes. Nous introduirons la *propriété de pseudo-simplification*, qui est satisfaite par tout po^+-monoïde simplifiable mais aussi par le $G^+ \cup \{\infty\}$ précédent, comme "version

limite" d'une certaine propriété des po^+-monoïdes de raffinement. Puis nous montrerons que $\overline{\mathbb{R}}^+ = ([0, +\infty], +, 0, \leq)$ est un po^+-monoïde *injectif* (au sens catégorique du terme, en prenant les plongements au lieu des monomorphismes)—ceci est en fait une forme équivalente de HB. Ceci nous permettra alors de montrer que pour un po^+-monoïde donné, l'existence d'un plongement dans une puissance de $\overline{\mathbb{R}}^+$ est une propriété "de type archimédien" (Théorème 10.17).

- Un secteur d'application partielle du Chapitre 10 se trouve dans le Chapitre 11, dans lequel nous étudierons les objets les plus étranges de ce cours, malgré la simplicité de leur définition. Ce sont les "monoïdes de types d'équidécomposabilité". L'étude de ces derniers nécessite souvent une machinerie *ad hoc*, à mettre en place dans chaque cas particulier, qui peut être extrêmement difficile et technique et utiliser largement d'autres domaines des mathématiques (topologie, théorie des nombres, théorie des ensembles...). Cependant, des résultats algébriques généraux permettent parfois d'obtenir des résultats non triviaux dans ce domaine. D'un point de vue strictement algébrique, le domaine représenté ici est très étroitement lié à la "théorie de la mesure abstraite", où l'on considère des mesures à valeurs dans un monoïde commutatif quelconque; en raison de ce dernier détail, les mesures seront-elles considérées finiment additives, mais pas en général dénombrablement additives.

Le lecteur averti aura remarqué que de nombreuses théories sont absentes de tout cela, comme la théorie des treillis (non nécessairement distributifs, modulaires, géométriques, continus...), ou encore la théorie des anneaux ordonnés (anneaux réticulés, f-anneaux, corps totalement ordonnés), ou l'étude de problèmes de mots (dans les groupes réticulés, abéliens ou non, ou les f-anneaux commutatifs...), ou la théorie des espaces de Banach ordonnés, *etc.*, *etc.*. D'où la copieuse bibliographie (très orientée cependant...) à la fin du cours, et aussi les nombreux exercices (249 en tout dans la première version) présentés à la fin de chaque chapitre, souvent destinés à présenter des contrexemples ou des compléments de cours pour les lecteurs les plus curieux.... L'origine de ces exercices se trouve souvent disséminée dans la bibliographie, en particulier les précieux [**Biga** *et al.*] et [**Birk2**]. Certains exercices seront marqués d'une ou plusieurs astérisques (*); l'interprétation de ce signe est en général la même pour tout le monde (que ceux qui ne sont pas du même avis me le signalent...).

Les notations et la terminologie utilisés ici sont essentiellement tout à fait standard. La plupart du temps, j'essaierai d'utiliser $\mathbb{N}$ au lieu de ω pour désigner l'ensemble des entiers naturels mais une telle résolution n'est pas toujours tenable, surtout lorsque des exemples à base d'ordinaux se manifestent. Ainsi la convention commode (et qui va de soi pour un théoricien des ensembles) $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ pour tout entier naturel n (et donc en particulier, $0 = \varnothing$, $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\ldots$) sera-t-elle parfois utilisée. De même, une *suite finie* sera un ensemble de la forme

$$(x_i)_{i<n} = \{(0, x_0), (1, x_1), \ldots, (n-1, x_{n-1})\}$$

et la relation d'inclusion pour celles-ci sera donc caractérisée par

$$(x_i)_{i<m} \subseteq (y_j)_{j<n} \iff \big(m \leq n \text{ et } (\forall i < m)(x_i = y_i)\big).$$

Pour tous ensembles X et Y, X^Y sera l'ensemble des applications de X vers Y, $\mathfrak{P}(X)$ sera l'ensemble des parties de X. Si f est une application de X vers Y, une autre notation pour f est sous forme de *famille*, $f = \big(f(x)\big)_{x\in X}$ ou encore $f = \big(f(x)\big)_x$ en l'absence d'ambiguité sur l'ensemble sous-jacent X. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, on notera $\bigcup_{i\in I} X_i$ la réunion de tous les X_i, et $\bigcap_{i\in I} X_i$ leur intersection; notons que si la réunion est toujours définie, l'intersection n'est définie sans ambiguité que si I est *non vide*, sans quoi le seul choix raisonnable pour l'intersection est l'ensemble "référentiel" (qui dépend du contexte). De la même façon, si $\mathcal{X}$ est un ensemble (resp. un ensemble non vide), nous noterons $\bigcup \mathcal{X}$ (resp. $\bigcap \mathcal{X}$) la réunion (resp. l'intersection) des éléments de $\mathcal{X}$, si bien que si $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in I\}$, alors $\bigcup \mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} X_i$ et, si $I \neq \varnothing$, $\bigcap \mathcal{X} = \bigcap_{i\in I} X_i$. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, nous noterons $\prod_{i\in I} X_i$ son *produit cartésien*, *i.e.* l'ensemble des applications $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ telles que $(\forall i \in I)\big(f(i) \in X_i\big)$. Si f est une application de X vers Y, nous noterons, pour toute partie U de X, $f[U]$ l'image de U par f (*c.à.d.* $\{f(x) \mid x \in U\}$), et, pour toute partie V de Y, $f^{-1}[V]$ l'image réciproque de V par f (nous n'utiliserons pas la notation $\overset{-1}{f}[V]$, qui a cependant l'avantage de rappeler que f n'est pas nécessairement une bijection: cela poserait des problèmes trop grands de clarté de notation lorsque f est elle-même une expression composée, comme par exemple $s+t\dots$). De plus, pour toute partie U de X, nous noterons $f{\restriction}_U$ la *restriction* de f à U. Deux ensembles sont *équipotents* quand il existe une bijection de l'un sur l'autre. Enfin, un ensemble est *dénombrable* quand il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$ (il est équivalent de dire qu'il est soit vide, soit image de $\mathbb{N}$ par une application quelconque; ou encore, soit fini, soit équipotent à $\mathbb{N}$).

Pendant que nous en sommes aux conventions de logique et théorie des ensembles, signalons la notation commode suivante, qui sera plusieurs fois utilisée dans le texte: $\exists_{i\in I} x_i \in M$ (resp. $\forall_{i\in I} x_i \in M$) sera une abréviation de $\exists (x_i)_{i\in I} \in M^I$ (resp., $\forall (x_i)_{i\in I} \in M^I$), ce qui est tout à fait moral dans l'optique où "seule une lettre peut suivre un quantificateur" (la notation familière $\forall (x,y) \in X \times Y$ n'est pas couverte par ce dernier principe, mais n'allons pas trop loin...).

Si X est un espace topologique et Y est une partie de X, nous noterons $\operatorname{Int}_X Y$ (resp. $\operatorname{Cl}_X Y$) l'intérieur (resp. l'adhérence) de Y dans X, et nous supprimerons l'indice X en l'absence d'ambiguité sur l'espace topologique ambiant X.

Un *ensemble préordonné* est un couple $(E, \leq)$ où E est un ensemble et $\leq$ est une relation de *préordre* sur X, *i.e.* une relation binaire réflexive et transitive. Si de plus $\leq$ est antisymétrique, nous dirons que $\leq$ est une relation d'ordre et que $(E, \leq)$ est un *ensemble ordonné*. Si $(X, \leq_X)$ et $(Y, \leq_Y)$ sont deux ensembles préordonnés, un *homomorphisme d'ensembles préordonnés* de X vers Y est une application *croissante* f de X vers Y (*i.e.* pour tous éléments x_0 et x_1 de X, $x_0 \leq_X x_1$ entraîne $f(x_0) \leq_Y f(x_1)$). Une application f comme ci-dessus est un *plongement* d'ensembles préordonnés quand f est un isomorphisme de X sur $f[X]$ (ce dernier étant muni de la restriction de $\leq_Y$); cela signifie donc que pour tous éléments x_0 et x_1 de X, $x_0 \leq x_1$ (resp. $x_0 = x_1$) *si et seulement si* $f(x_0) \leq f(x_1)$ (resp. $f(x_0) = f(x_1)$); bien entendu, si $\leq_X$ est antisymétrique, seule la partie pour $\leq$ est à vérifier. Une *chaîne*, ou *ensemble totalement ordonné*, est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques x et y sont toujours *comparables*, *i.e.* $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Enfin, il me semble être sur la bonne voie dans la résolution (positive) d'une conjecture qui s'énoncerait "l'ensemble des erreurs typographiques et des omissions d'un quelconque texte mathématique est infini" (*stratégie de preuve*: prenez un sous-ensemble fini d'erreurs et omissions; alors le complémentaire n'est jamais vide—c'est du moins ce que semble montrer l'expérience). Je serai donc naturellement reconnaissant à tout lecteur qui me fournirait une évidence expérimentale supplémentaire, s'appuyant sur ce texte, dans le sens de cette conjecture.

CHAPITRE 1

Axiome du choix, Théorème de Tychonoff, Théorème de Hahn-Banach

Le but de ce chapitre est d'introduire (ou de rappeler...) trois des outils de théorie des ensembles les plus importants dans ce qui va suivre (et par ailleurs, dans beaucoup d'autres mathématiques). Le statut du premier (et le plus fort) d'entre eux, *l'axiome du choix* (à partir de maintenant abrégé AC), est le seul à être "inébranlable", dans un sens qui va être précisé: comme son nom l'indique, c'est un axiome, alors que les deux autres sont ordinairement plutôt considérés comme des théorèmes que l'on prouve en utilisant AC. Nous allons voir ici que l'on peut également les considérer comme des axiomes, et ce point de vue est riche de possibilités. Voici quelques formulations équivalentes de AC:

Axiome du choix:

(AC1) Soit E une relation d'équivalence sur un ensemble X. Alors E admet un *ensemble de représentants*, *i.e.*, une partie de X qui rencontre chaque classe d'équivalence de E en un point et un seul.

(AC2) Tout produit cartésien d'ensembles non vides est non vide.

(AC3) Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties *non vides* d'un ensemble X. Alors il existe une *fonction de choix* sur $\mathcal{C}$, *i.e.*, une application $\gamma\colon \mathcal{C} \to X$ telle que $\gamma(X) \in X$, pour tout $X \in \mathcal{C}$.

La vérification de l'équivalence de (AC1)–(AC3) est un simple exercice. Les deux formes équivalentes les plus puissantes de AC sont cependant les suivantes:

Théorème de Zermelo. *Pour tout ensemble X, il existe une relation de* bon ordre *sur X,* i.e.*, une relation d'ordre sur X pour laquelle toute partie non vide de X admet un plus petit élément.*

Lemme de Zorn. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble non vide ordonné* inductif*,* i.e.*, tel que toute partie totalement ordonnée (on dit encore* chaîne*) de E admette un majorant. Alors E admet un élément maximal.*

Bien qu'il soit assez facile de vérifier que les deux formes ci-dessus impliquent AC, les démonstrations du Théorème de Zermelo et du Lemme de Zorn à partir de AC sont absolument non triviales. *Voir* [**Jech2**] pour des preuves concises, utilisant les ordinaux, ou les Exercices 1.3 et 1.4.

Passons maintenant au Théorème de Tychonoff. Sa formulation classique est la suivante:

Théorème de Tychonoff:

Tout produit cartésien d'espaces topologiques compacts est compact.

(Remarquer la similarité avec (AC2) ci-dessus...)

Comme nous allons le voir, AC entraîne le Théorème de Tychonoff. Ce dernier énoncé, en raison de sa puissance, peut en fait être substitué à AC dans beaucoup de cas et de fil (long...) en aiguille (effilée...), on en vient à le considérer lui-même comme un *axiome*, plus faible que AC (et en fait *strictement* plus faible, *voir* les notes en fin de chapitre). Nous n'allons cependant pas prendre l'énoncé ci-dessus comme forme originelle de cet axiome—un axiome est en effet censé être quelque chose "allant de soi", ce qui peut difficilement être cru dans l'exemple présent. Énonçons d'abord quelques définitions.

Définition. Soit X un ensemble. Un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X est dit:

- *centré*, (ou *ayant la propriété d'intersection finie*) quand pour toute partie *finie* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$, l'intersection $\bigcap \mathcal{D}$ des éléments de $\mathcal{D}$ est non vide;
- *filtrant*, quand pour tout $U \in \mathcal{C}$ et tout $V \subseteq X$, $U \subseteq V$ entraîne $V \in \mathcal{C}$.

Un *filtre* sur X est une partie non vide, filtrante, et stable par intersection finie, de $\mathfrak{P}(X)$, ne contenant pas $\varnothing$ pour élément. Notons, en particulier, que tout filtre sur X est une partie centrée de $\mathfrak{P}(X)$. Par exemple, si X est un espace topologique et x est un élément de X, alors l'ensemble $\mathcal{V}_x^X$ des *voisinages* de x dans X est un filtre, le *filtre des voisinages de* x (cet exemple est fondamental). Un filtre sur X qui est maximal pour l'inclusion est appelé un *ultrafiltre*. Un filtre sur X est *principal* quand il est de la forme $\{Y \subseteq X \mid A \subseteq Y\}$ pour une certaine partie (non vide) A de X.

Il est d'importance de se souvenir de la maxime suivante, traduction de la condition $\varnothing \notin \mathcal{F}$:

Les filtres ont horreur du vide

Dans le contexte à venir des filtres sur les algèbres de Boole, cette maxime sera cependant mise en difficulté, illustrant une fois de plus l'autre maxime encore plus forte

Tout ce qui n'est pas expressément interdit finira par se produire

Topologiquement, on peut se représenter les filtres comme des fermés et les ultrafiltres comme des points (c'est en tout cas très visible sur un ensemble fini, et on l'obtient sur un ensemble infini *via* le "compactifié de Stone-Čech"). Bien qu'il soit très difficile de se représenter "à quoi ressemble" un ultrafiltre non principal, cette intuition est très utile. De façon plus générale, les ultrafiltres appartiennent à la corporation des objets comme les idéaux maximaux (en théorie des anneaux), des formes linéaires continues (en analyse fonctionnelle), des caractères continus (en théorie des groupes compacts) ou bien d'autres encore! On ne peut en général se les représenter, mais on sait "où ils se trouvent", et c'est cela le plus important.

Proposition 1.1. *Soit X un ensemble non vide. Alors un ensemble de parties de X est centré si et seulement si il est contenu dans un filtre sur X.*

Preuve. Tout filtre étant centré (*cf.* maxime ci-dessus!), l'implication de la droite vers la gauche est triviale. Réciproquement, on vérifie facilement que si $\mathcal{C}$ est une partie centrée de X, alors l'ensemble $\mathcal{F}$ défini par

$$\mathcal{F} = \left\{ Y \subseteq X \mid (\exists n \in \mathbb{N})\big(\exists_{i<n} X_i \in \mathcal{C}\big) \left(\bigcap_{i<n} X_i \subseteq Y \right) \right\}$$

est un filtre sur X contenant $\mathcal{C}$ (le *filtre engendré par* $\mathcal{C}$). $\square$

Notons que la preuve ci-dessus n'utilise aucune forme d'axiome du choix. Par contraste, ce n'est pas le cas pour le Théorème suivant:

THÉORÈME 1.2 (utilise AC). *Soit X un ensemble non vide. Alors tout filtre sur X est contenu dans un ultrafiltre sur X.*

PREUVE. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Soit $\mathbf{X}$ l'ensemble des filtres sur X contenant $\mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ est non vide. On vérifie facilement que $\mathbf{X}$ muni de l'inclusion est un ensemble ordonné inductif. Il résulte du Lemme de Zorn que $\mathbf{X}$ admet un élément maximal pour l'inclusion; cet élément est nécessairement un ultrafiltre sur X. □

Ainsi, l'on peut définir un nouvel axiome, parfois appelé "axiome de l'ultrafiltre", mais que nous abrégerons en fait PIT ("prime ideal theorem"—nous justifierons cette terminologie au chapitre suivant) de la façon suivante:

PIT: *Tout filtre sur un ensemble est contenu dans un ultrafiltre.*

Nous verrons que cet axiome est *équivalent* au Théorème de Tychonoff: il est donc, par le résultat de Halpern et Levy (*voir* Notes en fin de chapitre) strictement plus faible que AC.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble X et soit Y une partie de X. On dit que Y est *$\mathcal{F}$-stationnaire* quand $\mathcal{F} \cup \{Y\}$ est centrée, *i.e.*, pour tout $Z \in \mathcal{F}$, $Y \cap Z \neq \varnothing$.

La terminologie ci-dessus est inspirée de la définition d'un ensemble stationnaire (qui est, par définition, un $\mathcal{F}$-stationnaire par rapport au filtre $\mathcal{F}$ des clos cofinaux sur un cardinal régulier donné), mais ne doit en aucun cas être considérée comme universelle.

Par la Proposition 1.1, Y est $\mathcal{F}$-stationnaire si et seulement si $\mathcal{F} \cup \{Y\}$ est contenu dans un filtre.

LEMME 1.3. *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *$\mathcal{F}$ est un ultrafiltre;*
(b) *Toute partie $\mathcal{F}$-stationnaire de X est dans $\mathcal{F}$;*
(c) *Pour toute partie Y de X, $Y \notin \mathcal{F}$ si et seulement si $X \setminus Y \in \mathcal{F}$.*

PREUVE. (a)⇒(b) Si Y est $\mathcal{F}$-stationnaire, alors $\mathcal{F} \cup \{Y\}$ est contenu dans un filtre sur X; par maximalité de $\mathcal{F}$, il en résulte que $Y \in \mathcal{F}$.

(b)⇒(c) Soit Y une partie de X. Si $X \setminus Y \in \mathcal{F}$, alors $Y \notin \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est centré. Réciproquement, supposons que $Y \notin \mathcal{F}$; puisque $\mathcal{F}$ est filtrant, ceci peut encore s'écrire $(\forall Z \in \mathcal{F})(Z \not\subseteq Y)$, *i.e.*, $X \setminus Y$ est $\mathcal{F}$-stationnaire. Par hypothèse (b), $X \setminus Y \in \mathcal{F}$.

(c)⇒(a) Soit $\mathcal{G}$ un filtre sur X contenant $\mathcal{F}$, on montre que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Soit donc Y un élément de $\mathcal{G}$. Si $Y \notin \mathcal{F}$, alors, par hypothèse, $X \setminus Y \in \mathcal{F}$, donc $X \setminus Y \in \mathcal{G}$, absurde puisque $Y \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est centré. Ainsi, $Y \in \mathcal{F}$; par suite, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. □

LEMME 1.4 (utilise PIT). *Soit X un ensemble non vide. Alors tout filtre $\mathcal{F}$ sur X est l'intersection des ultrafiltres sur X qui contiennent $\mathcal{F}$.*

PREUVE. Prouvons l'inclusion dans le sens non trivial. Il suffit de montrer que pour toute partie Y de X non dans $\mathcal{F}$, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X contenant $\mathcal{F}$ tel que $Y \notin \mathcal{U}$. Mais $X \setminus Y$ est $\mathcal{F}$-stationnaire, donc, par la Proposition 1.1 et

par PIT, $\mathcal{F} \cup \{X \setminus Y\}$ est contenu dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X. Alors $\mathcal{U}$ satisfait la condition demandée. □

Définition. Soient X et Y deux ensembles, soit f une application de X vers Y. Pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, *l'image de $\mathcal{F}$ par f*, notée $f_*\mathcal{F}$, est définie par

$$f_*\mathcal{F} = \{Z \subseteq Y \mid f^{-1}[Z] \in \mathcal{F}\}.$$

Lemme 1.5. *Soient X et Y deux ensembles, soit f une application de X vers Y, soit $\mathcal{F}$ un filtre (resp., ultrafiltre) sur X. Alors $f_*\mathcal{F}$ est un filtre (resp., ultrafiltre) sur Y.*

Preuve. La vérification est immédiate. □

Définition. Soit X un espace topologique, soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. On dit qu'un élément x de X est une

— *valeur d'adhérence* de $\mathcal{F}$ quand $x \in \bigcap_{Y \in \mathcal{F}} \operatorname{Cl} Y$,
— *limite* de $\mathcal{F}$ quand $\mathcal{V}_x^X \subseteq \mathcal{F}$; on dit aussi que $\mathcal{F}$ *converge* vers x.

Il est évident que toute limite d'un filtre est également valeur d'adhérence de ce filtre, mais des exemples très simples montrent que la réciproque est fausse. Cependant, pour les ultrafiltres, la réciproque est vraie:

Proposition 1.6. *Soit X un espace topologique, soit x un élément de X et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. Alors x est valeur d'adhérence de $\mathcal{U}$ si et seulement si x est limite de $\mathcal{U}$.*

Preuve. Si x est limite de $\mathcal{U}$, alors x est valeur d'adhérence de $\mathcal{U}$. Réciproquement, supposons que x soit valeur d'adhérence de $\mathcal{U}$. Par définition, pour tout voisinage V de x, V rencontre tout élément de $\mathcal{U}$, *i.e.*, V est $\mathcal{U}$-stationnaire. D'après le Lemme 1.3, $V \in \mathcal{U}$: par suite, $\mathcal{V}_x^X \subseteq \mathcal{U}$. □

Rappelons maintenant une terminologie tout à fait standard:

Définition. Un espace topologique X est

— *séparé* quand pour tous éléments a, b de X tels que $a \neq b$, il existe $U \in \mathcal{V}_a^X$ et $V \in \mathcal{V}_b^X$ tels que $U \cap V = \varnothing$.
— *quasicompact* quand tout ensemble centré de fermés de X a une intersection non vide (ou, de façon équivalente, tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini).
— *compact* quand X est séparé et quasicompact.

Avertissement: en américain, "séparé" se dit "Hausdorff", "quasicompact" se dit "compact" et "compact" se dit "compact Hausdorff" (ou parfois "bicompact").

Comme la proposition suivante le montrera, "séparé" et "quasicompact" sont en un sens *duaux*:

Proposition 1.7 (utilise PIT). *Soit X un espace topologique. Alors X satisfait les propriétés suivantes:*

(a) *l'espace X est séparé si et seulement si tout ultrafiltre sur X a au plus une limite;*
(b) *l'espace X est quasicompact si et seulement si tout ultrafiltre sur X a au moins une limite;*

(c) *l'espace X est compact si et seulement si tout ultrafiltre sur X a exactement une limite.*

Preuve. (a) Supposons d'abord X séparé et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. Si $\mathcal{U}$ admet deux limites distinctes a et b, il existe (puisque X est séparé) $U \in \mathcal{V}_a^X$ et $V \in \mathcal{V}_b^X$ tels que $U \cap V = \varnothing$. Mais, par définition de la convergence, $U \in \mathcal{U}$ et $V \in \mathcal{U}$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{U}$ est centré.

Réciproquement, supposons que tout ultrafiltre sur X admette au plus une limite. Soient a et b deux éléments de X, et supposons la condition suivante réalisée:

$$(\forall U \in \mathcal{V}_a^X)(\forall V \in \mathcal{V}_b^X)(U \cap V \neq \varnothing). \tag{1.1}$$

Soit $\mathcal{C} = \{U \cap V \mid (U, V) \in \mathcal{V}_a^X \times \mathcal{V}_b^X\}$. D'après (1.1), $\mathcal{C}$ est une partie centrée de $\mathfrak{P}(X)$. D'après la Proposition 1.1 et par PIT, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X contenant $\mathcal{C}$. Par définition, $\mathcal{U}$ contient $\mathcal{V}_a^X$ et $\mathcal{V}_b^X$; par suite, $\mathcal{U}$ converge vers a et vers b, d'où par hypothèse $a = b$. Donc X est séparé.

(b) Supposons d'abord X quasicompact et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. Alors $\mathcal{C} = \{\operatorname{Cl} Y \mid Y \in \mathcal{U}\}$ est un ensemble centré de fermés de X, donc par hypothèse $\bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing$, ce qui signifie exactement que $\mathcal{U}$ admet une valeur d'adhérence, donc une limite par la Proposition 1.6.

Réciproquement, supposons que tout ultrafiltre sur X admette au moins une limite. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble centré de fermés de X. Par PIT, $\mathcal{C}$ est contenu dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Par hypothèse, $\mathcal{U}$ admet une limite, disons x. Puisque x est adhérent à $\mathcal{U}$, x appartient à l'intersection des adhérences des éléments de $\mathcal{U}$, donc, puisque $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$, x appartient aussi à l'intersection des adhérences des éléments de $\mathcal{C}$. Puisque les éléments de $\mathcal{C}$ sont des fermés, x appartient à tous les éléments de $\mathcal{C}$. Donc $\bigcap \mathcal{C} \neq \varnothing$. Ainsi, X est quasicompact.

(c) résulte immédiatement de (a) et (b). □

On peut alors démontrer le Théorème de Tychonoff sous la forme énoncée précédemment:

Théorème 1.8 (Théorème de Tychonoff, utilise PIT). *Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact.*

Preuve. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces compacts. Posons $X = \prod_{i \in I} X_i$, et pour tout $i \in I$, soit p_i la projection canonique de X sur X_i. Rappelons que la topologie produit sur X est la topologie la plus grossière telle que toutes les applications p_i $(i \in I)$ soient continues. Par suite, les ouverts de X sont les réunions *arbitraires* d'"ouverts élémentaires", ces derniers étant les intersections *finies* de "cylindres" $p_i^{-1}[U]$ pour $i \in I$ et U ouvert de X_i. Il est alors facile de vérifier directement que X est séparé (en fait, deux éléments distincts quelconques de X sont séparés par deux cylindres disjoints).

Soit donc $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X; Pour tout $i \in I$, posons $\mathcal{U}_i = (p_i)_* \mathcal{U}$. Par le Lemme 1.5, $\mathcal{U}_i$ est un ultrafiltre sur X_i. Par la Proposition 1.7, $\mathcal{U}_i$ converge vers exactement un point x_i de X_i. Soit alors $x = (x_i)_{i \in I}$, on montre que $\mathcal{U}$ converge vers x. Il suffit pour cela de montrer que tout voisinage élémentaire de x appartient à $\mathcal{U}$ (car $\mathcal{U}$ est filtrant). Soit donc V un tel voisinage élémentaire. Par définition, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des cylindres V_k $(k < n)$ tels que $V = \bigcap_{k<n} V_k$; puisque $\mathcal{U}$ est stable par intersection finie, il suffit donc de montrer que chaque V_k appartient à $\mathcal{U}$. Par définition, il existe $i \in I$ et un ouvert U de X_i tels que $V_k = p_i^{-1}[U]$. Puisque $x_i = p_i(x) \in U$ et que U est un ouvert de X_i, U est un voisinage de x_i dans X_i.

Puisque $\mathcal{U}_i$ converge vers x_i, l'égalité $U \in \mathcal{U}_i$ a lieu, *i.e.*, $p_i^{-1}[U] \in \mathcal{U}$ par définition: on a donc bien montré que $V_k \in \mathcal{U}$. Ainsi, $\mathcal{U}$ converge vers x. On conclut par la Proposition 1.7(b). □

Pour les espaces non nécessairement séparés, on peut aussi démontrer une version du Théorème de Tychonoff:

THÉORÈME 1.9 (utilise AC). *Tout produit d'espaces topologiques quasicompacts est quasicompact.*

PREUVE. Similaire à celle du Théorème 1.8, *à un détail près*: pour tout $i \in I$, $\mathcal{U}_i$ admet au moins une limite, mais *l'unicité de cette limite n'est plus garantie*: on a donc besoin de AC pour pouvoir affirmer qu'il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ telle que pour tout $i \in I$, x_i soit une limite de $\mathcal{U}_i$. Le reste de la preuve est similaire à la preuve précédente. □

On peut montrer (*voir* Exercice 1.11) que ce n'est pas faute d'être assez subtil que l'on ne semble pas pouvoir se passer de l'utilisation de AC dans la preuve ci-dessus: en effet, *l'axiome du choix est équivalent au Théorème de Tychonoff pour les espaces quasi-compacts.* Signalons malgré tout que la plupart des utilisations du Théorème de Tychonoff se font sur des espaces compacts (donc séparés).

Le théorème suivant nous donne plusieurs énoncés équivalents à PIT (sans axiome du choix); il en existe beaucoup d'autres, dont par exemple le Théorème de compacité du calcul propositionnel, ou encore le Théorème de compacité du calcul des prédicats du premier ordre. C'est peut-être cette variété inépuisable d'énoncés équivalents à PIT qui donne à croire que c'est un axiome dont le rôle est vraiment central.

THÉORÈME 1.10. *Les énoncés suivants sont équivalents (sans* AC*):*

(i) *Théorème de Tychonoff pour les espaces compacts.*
(ii) *Pour tout ensemble X, $\{0,1\}^X$ (muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0,1\}$) est un espace topologique compact.*
(iii) PIT*, c.à.d., pour tout ensemble non vide I, tout filtre sur I est contenu dans un ultrafiltre sur I.*

PREUVE. L'implication (i)⇒(ii) est triviale.

Supposons maintenant (ii) réalisé, montrons (iii). Soit donc I un ensemble non vide et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur I. On cherche à montrer que $\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre sur I. Posons $X = \mathfrak{P}(I)$, et munissons $\mathfrak{P}(X)$ de la topologie image de la topologie produit sur $\{0,1\}^X$ *via* la bijection canonique entre ces deux ensembles (celle qui à toute partie de X associe sa fonction caractéristique). Il est important de noter qu'ainsi, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid x \in Y\}$ est un ouvert fermé de $\mathfrak{P}(X)$ (la vérification est triviale). On en tire en particulier le Fait suivant:

FAIT 1. *L'ensemble* $\mathbf{U}$ *des ultrafiltres sur I est un fermé de* $\mathfrak{P}(X)$.

PREUVE DU FAIT. Notons d'abord que tout filtre (donc *a fortiori* tout ultrafiltre) sur I est un ensemble de parties de I, donc une partie de X, *i.e.*, un élément de $\mathfrak{P}(X)$. On peut alors exprimer $\mathbf{U}$ de la façon suivante:

$$\mathbf{U} = \bigcap_{x,y\in X} \mathbf{U}_{xy},$$

où l'on pose, pour tous éléments x et y de X,

$$\mathbf{U}_{xy} = \big\{\mathcal{U} \in \mathfrak{P}(X) \mid I \in \mathcal{U} \text{ et } \varnothing \notin \mathcal{U} \text{ et } \big((x \in \mathcal{U} \text{ et } x \subseteq y) \Rightarrow y \in \mathcal{U}\big) \\ \text{et } \big((x \in \mathcal{U} \text{ et } y \in \mathcal{U}) \Rightarrow x \cap y \in \mathcal{U}\big) \\ \text{et } \big(x \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow I \setminus x \in \mathcal{U}\big)\big\} \quad (1.2)$$

(ceci résulte du Lemme 1.3). Par la remarque précédant l'énoncé du Fait, les $\mathbf{U}_{xy}$ sont fermés (et en fait également ouverts), et par suite $\mathbf{U}$ est fermé. □ Fait 1.

Soit alors ϕ l'application de I vers $\mathfrak{P}(X)$ qui à tout $i \in I$ associe l'ultrafiltre *principal* associé à i, *i.e.*,

$$\phi(i) = \{x \in X \mid i \in x\}$$

(notons que l'image de ϕ est un sous-ensemble de $\mathbf{U}$). Alors $\mathcal{G} = \phi_*\mathcal{F}$ est un filtre sur $\mathfrak{P}(X)$ (Lemme 1.5). Puisque par hypothèse $\mathfrak{P}(X)$ est un espace compact, $\mathcal{G}$ a une valeur d'adhérence dans $\mathfrak{P}(X)$, disons $\mathcal{U}$. Cela signifie que $\mathcal{U}$ appartient à $\bigcap_{Y \in \mathcal{G}} \operatorname{Cl} Y$, donc à $\bigcap_{y \in \mathcal{F}} \operatorname{Cl} \phi[y]$: ainsi, nous avons obtenu

$$\mathcal{U} \in \bigcap_{y \in \mathcal{F}} \operatorname{Cl}(\{\phi(i) \mid i \in y\}).$$

Puisque les $\phi(i)$ appartiennent à $\mathbf{U}$, il résulte du Fait précédent que $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$, *i.e.*, $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur I. De plus, pour tout $y \in \mathcal{F}$, tous les $\phi(i)$ pour $i \in y$ appartiennent à $\{\mathcal{V} \in \mathfrak{P}(X) \mid y \in \mathcal{V}\}$ qui est un fermé de $\mathfrak{P}(X)$, donc $\mathcal{U}$ y appartient également, *i.e.*, $y \in \mathcal{U}$. Ceci est vrai pour tout y dans $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. D'où (iii).

Enfin, (iii)⇒(i) est le résultat du Théorème 1.8. □

Le dernier volet de ce chapitre est l'étude d'un autre fameux "axiome-Théorème", le *Théorème de Hahn-Banach*. Le Théorème de Hahn-Banach, à l'instar de PIT, est un résultat classique de théorie des ensembles plus AC dont les applications sont légion. C'est en fait, comme nous allons le voir sous peu, une conséquence de PIT (*voir* [**Lux**] pour plus de détails). Sa formulation classique est un peu moins concise que celle du Théorème de Tychonoff, aussi bien sous forme géométrique que sous forme algébrique:

Théorème de Hahn-Banach (forme algébrique):

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soit S un sous-espace vectoriel de E, soit f une forme linéaire sur S et soit $p\colon E \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes:

$$(\forall x, y \in E)\big(p(x+y) \le p(x) + p(y)\big); \qquad (\forall x \in E)(\forall \lambda \in [0, +\infty[)\big(p(\lambda x) = \lambda p(x)\big).$$

Supposons de plus que $f \le p\restriction_S$. Alors il existe une forme linéaire g sur E prolongeant f et telle que $g \le p$.

Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique):

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique, S un sous-espace affine de E et U un ouvert convexe non vide de E. Si $U \cap S = \varnothing$, alors il existe un hyperplan affine H contenant S tel que $U \cap H = \varnothing$.

Il est bien connu que ces deux formes sont équivalentes, ceci sans utilisation d'aucune forme d'axiome du choix (en associant les hyperplans et les formes linéaires, les voisinages ouverts convexes de 0 et leurs fonctionnelles de Minkowski...). Par contre, il n'est absolument pas visible "à l'œil nu" que ces énoncés sont des conséquences du Théorème de compacité de Tychonoff. Aussi, dans le but d'harmoniser

les études des deux axiomes, allons-nous choisir une troisième formulation, plus concise et plus proche de la formulation ci-dessus du "Théorème de l'ultrafiltre", du Théorème de Hahn-Banach. Nous aurons d'abord besoin d'une définition.

Définition. Soit X un ensemble et soit μ une application de $\mathfrak{P}(X)$ vers $\mathbb{R}$. Alors μ est une *mesure finiment additive* sur $\mathfrak{P}(X)$ quand pour toutes parties disjointes U et V de X, l'égalité $\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$ a lieu (*notons que cela entraîne immédiatement que* $\mu(\varnothing) = 0$). Si de plus $\mu(Y) \geq 0$ pour tout $Y \subseteq X$, nous dirons que μ est *positive.* Si μ est positive et $\mu(X) = 1$, nous dirons que μ est une *mesure de probabilité finiment additive.* Si μ est une mesure finiment additive et $\mathcal{F}$ est un filtre sur X tel que $(\forall Y \in \mathcal{F})\big(\mu(X \setminus Y) = 0\big)$, nous dirons que μ est *concentrée* sur $\mathcal{F}$.

La théorie de l'intégration se fait très bien avec les mesures finiment additives—en réalité, c'est même nettement plus facile que dans le cas σ-additif car les "Théorèmes limite" (Lemme de Fatou, Théorème de convergence dominée...) sont faux dans ce contexte et n'ont donc pas besoin d'y être démontrés. La définition ci-dessus n'est par ailleurs pas la plus générale possible: d'une part, l'on peut imposer à μ de n'être définie que sur une *sous-algèbre de Boole* de $\mathfrak{P}(X)$ (*i.e.*, un ensemble non vide de parties de X stable par intersection finie et complémentation), et d'autre part l'on peut remplacer l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ de μ par n'importe quel monoïde commutatif. Nous n'aurons pas besoin de tout ceci pour l'instant. Nous pouvons d'ores et déjà définir l'axiome que nous baptiserons HB:

> HB: *Pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble X, il existe une mesure de probabilité finiment additive sur $\mathfrak{P}(X)$ concentrée sur $\mathcal{F}$.*

Il est alors immédiat de voir que HB résulte de PIT précédemment défini: en effet, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$, alors la fonction caractéristique de $\mathcal{U}$ est une mesure de probabilité finiment additive sur $\mathfrak{P}(X)$ concentrée sur $\mathcal{F}$. En prime, cette mesure de probabilité finiment additive est à valeurs *discrètes*—dans $\{0, 1\}$, et en fait, *via* cette identification, les ultrafiltres sont exactement les mesures de probabilité finiment additives à valeurs dans $\{0, 1\}$ (la vérification est triviale!). En fait, ceci montre que PIT est une version *discrète* de HB.

Définition. Pour tout ensemble X, soient $\mathcal{S}(X)$ et $\mathcal{B}(X)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^X$ définis par:

$$\mathcal{S}(X) = \{f \in \mathbb{R}^X \mid \operatorname{Im} f \text{ est un ensemble fini}\},$$
$$\mathcal{B}(X) = \{f \in \mathbb{R}^X \mid \operatorname{Im} f \text{ est une partie bornée de } \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, $\mathcal{S}(X)$ (*espace des fonctions simples sur* X) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X)$. Munissons ce dernier de la norme de la convergence uniforme sur X (définie par $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$).

Lemme 1.11. *$\mathcal{S}(X)$ est un sous-espace dense de $\mathcal{B}(X)$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{B}(X)$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe, par définition, $C > 0$ tel que $(\forall x \in X)(-C \leq f(x) \leq C)$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $C/n \leq \varepsilon$. Pour tout entier $k \in [-n+1, n-1]$, posons $I_k = [(k-1)C/n, kC/n[$ et posons $I_n = [(n-1)C/n, C]$. Puis définissons s par

$$s = \sum_{k=-n+1}^{n} \big((k-1)C/n\big) \cdot \chi_{f^{-1}[I_k]}.$$

Alors $s \in \mathcal{S}(X)$ et il est facile de vérifier que $0 \leq f - s \leq \varepsilon$. $\square$

DÉFINITION. Pour toute mesure finiment additive μ sur $\mathfrak{P}(X)$ et tout $s \in \mathcal{S}(X)$, on définit *l'intégrale* de s par rapport à μ, notée $\int s \, \mathrm{d}\mu$, comme suit:

$$\int s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot \mu\big(s^{-1}\{\alpha\}\big).$$

La somme ci-dessus est bien à support fini, car $\mu\big(s^{-1}\{\alpha\}\big)$ n'est non nul que pour un nombre *fini* de α.

On note souvent $\int s(x) \, \mathrm{d}\mu(x)$ lorsque l'on veut préciser quelle est la "variable d'intégration" x.

LEMME 1.12. *Soit X un ensemble et soit μ une mesure finiment additive sur $\mathfrak{P}(X)$. Alors l'application $\bar{\mu} \colon s \mapsto \int s \, \mathrm{d}\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(X)$. Si de plus μ est* positive*, alors $\bar{\mu}$ est* positive *et* continue *(en fait, $\mu(X)$-Lipschitzienne).*

PREUVE. Il est facile de vérifier que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathcal{S}(X)$, l'égalité $\int (\lambda \cdot s) \, \mathrm{d}\mu = \lambda \cdot \int s \, \mathrm{d}\mu$ a lieu. Il est légèrement plus délicat de vérifier que $\bar{\mu}$ est un morphisme additif; soient donc s et t dans $\mathcal{S}(X)$. On calcule l'intégrale de $s+t$ (les sommations se font sur l'ensemble d'indices $\mathbb{R}$, mais elles sont à support fini):

$$\begin{aligned}
\int (s+t) \, \mathrm{d}\mu &= \sum_{\gamma} \gamma \cdot \mu((s+t)^{-1}\{\gamma\}) \\
&= \sum_{\gamma} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} (\alpha+\beta) \cdot \mu(s^{-1}\{\alpha\} \cap t^{-1}\{\beta\}) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} (\alpha+\beta) \cdot \mu(s^{-1}\{\alpha\} \cap t^{-1}\{\beta\}) \\
&= \sum_{\alpha} \left(\alpha \cdot \sum_{\beta} \mu(s^{-1}\{\alpha\} \cap t^{-1}\{\beta\}) \right) + \sum_{\beta} \left(\beta \cdot \sum_{\alpha} \mu(s^{-1}\{\alpha\} \cap t^{-1}\{\beta\}) \right) \\
&= \sum_{\alpha} \alpha \cdot \mu(s^{-1}\{\alpha\}) + \sum_{\beta} \beta \cdot \mu(t^{-1}\{\beta\}) \\
&= \int s \, \mathrm{d}\mu + \int t \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\bar{\mu}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(X)$.

Supposons maintenant que μ est de plus *positive*. Il est immédiat que $\bar{\mu}$ est positive, *i.e.*, $\bar{\mu}(s) \geq 0$ si $s \geq 0$. On montre maintenant que $\bar{\mu}$ est $\mu(X)$-Lipschitzienne. Soit donc $s \in \mathcal{S}(X)$. Posons $C = \|s\|$ et identifions C avec la fonction constante sur X de valeur C. On a alors $-C \leq s \leq C$, d'où, puisque $\bar{\mu}$ est une forme linéaire positive, $\bar{\mu}(-C) \leq \bar{\mu}(s) \leq \bar{\mu}(C)$, *i.e.*, $-C\mu(X) \leq \bar{\mu}(s) \leq C\mu(X)$: ainsi, $\|\bar{\mu}(s)\| \leq \mu(X) \cdot \|s\|$. $\square$

Par les Lemmes 1.11 et 1.12, la forme linéaire $\bar{\mu} \colon s \mapsto \int s \, \mathrm{d}\mu$ se prolonge en une unique forme linéaire positive sur $\mathcal{B}(X)$. Nous noterons encore $\int f \, \mathrm{d}\mu$ l'image par cette forme linéaire de toute application bornée de X vers $\mathbb{R}$; par le Lemme 1.12, cette forme linéaire est $\mu(X)$-Lipschitzienne, *i.e.*, $\left|\int f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \mu(X) \cdot \|f\|$ pour tout $f \in \mathcal{B}(X)$.

THÉORÈME 1.13. *Les énoncés suivants sont équivalents (sans utiliser AC):*

(i) *Théorème de Hahn-Banach sous forme algébrique.*
(ii) *Théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique.*
(iii) *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, soit S un sous-espace de dimension 1 de E et soit f une forme linéaire 1-Lipschitzienne sur S. Alors f se prolonge en une forme linéaire 1-Lipschitzienne sur E.*
(iv) *L'énoncé* HB *vu ci-dessus.*

Preuve. L'équivalence entre (i) et (ii) est classique (sinon c'est un bon exercice). L'implication (i)⇒(iii) est triviale.

Supposons avoir (iii), montrons (iv). Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble non vide X, montrons qu'il existe une mesure de probabilité finiment additive sur $\mathfrak{P}(X)$ concentrée sur $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{I}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X)$ défini par

$$\mathcal{I} = \big\{f \in \mathcal{B}(X) \mid (\exists Y \in \mathcal{F})(f\restriction_Y = 0)\big\}.$$

Soit $\mathcal{J} = \mathrm{Cl}\,\mathcal{I}$ l'adhérence de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{B}(X)$ (pour la "norme infinie"). Soit E l'espace vectoriel quotient $\mathcal{B}(X)/\mathcal{J}$. Pour tout $\varphi \in E$, posons

$$\|\varphi\| = \inf\{\|f\| \mid f \in \varphi\}.$$

Il est alors clair que $\|_\|$ est une norme sur E (pour montrer que $\|\varphi\| = 0$ implique que $\varphi = 0$, on utilise le fait que $\mathcal{J}$ est un sous-espace vectoriel *fermé* de $\mathcal{B}(X)$). Soit S le sous-espace de E engendré par l'élément $\bar{1} = 1 + \mathcal{J}$ de E. Alors S est une droite vectorielle, *i.e.*, $1 \notin \mathcal{J}$: sinon, il existerait $f \in \mathcal{I}$ tel que $\|1 - f\| < 1$, d'où, pour tout $x \in X$, $1 - f(x) < 1$, *i.e.*, $f(x) > 0$; ceci contredirait $f \in \mathcal{I}$. En fait, on montre par un raisonnement similaire que $\|1 + \mathcal{J}\| = 1$. En effet, il s'agit de montrer que pour tout $f \in \mathcal{J}$, l'égalité $\|1 + f\| \geq 1$ a lieu. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{I}$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$. Soit $Y \in \mathcal{F}$ tel que $g\restriction_Y = 0$. Alors pour tout $x \in Y$, l'égalité $\|f(x)\| < \varepsilon$ a lieu, d'où $1 + f(x) > 1 - \varepsilon$; il en résulte que $\|1 + f\| > 1 - \varepsilon$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$; ce qui permet de conclure. Soit alors $\Phi\colon S \to \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \bar{1} \mapsto \lambda$. Puisque l'on a vu que $\|\bar{1}\| = 1$, Φ est 1-Lipschitzienne. Par hypothèse, il existe une forme linéaire 1-Lipschitzienne Ψ sur E qui prolonge Φ. Définissons $\psi\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \Psi(f + \mathcal{J})$. Il est clair que ψ est une forme linéaire 1-Lipschitzienne sur $\mathcal{B}(X)$ et que $\psi(1) = 1$, et que ψ est invariante par l'équivalence associée à $\mathcal{J}$. Par suite, l'application $\mu\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}$, $Y \mapsto \psi(\chi_Y)$ est une mesure finiment additive sur $\mathfrak{P}(X)$ telle que $\mu(X) = 1$; de plus, si Y est un élément de $\mathcal{F}$, alors, puisque χ_X et χ_Y sont équivalents modulo $\mathcal{J}$, on a $\mu(Y) = \mu(X) = 1$, donc $\mu(X \setminus Y) = 0$. Enfin, pour toute partie Y de X, le fait que $\|\chi_Y\| \leq 1$ et $\|1 - \chi_Y\| \leq 1$ implique, puisque ψ est 1-Lipschitzienne, que $|\mu(Y)| \leq 1$ et $|1 - \mu(Y)| \leq 1$, d'où $0 \leq \mu(Y) \leq 1$: donc μ est positive. Finalement, μ est une mesure de probabilité finiment additive sur $\mathfrak{P}(X)$ concentrée sur $\mathcal{F}$. On a donc montré (iv).

Supposons finalement avoir (iv), montrons (i) (forme algébrique du Théorème de Hahn-Banach). Soient donc E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, S un sous-espace vectoriel de E, f une forme linéaire sur S et soit $p\colon E \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes:

$$(\forall x, y \in E)\big(p(x + y) \leq p(x) + p(y)\big); \qquad (\forall x \in E)(\forall \lambda \in [0, +\infty[)\big(p(\lambda x) = \lambda p(x)\big).$$

(Nous appellerons "homogénéité positive" la dernière des deux conditions ci-dessus). Supposons de plus que $f \leq p\restriction_S$. On cherche à prolonger f en une forme linéaire g sur E telle que $g \leq p$.

On résout tout d'abord le problème dans le cas où S est de codimension *finie* dans E, disons n. Il existe alors des sous-espaces $S_0, \ldots, S_n$ de E tels que $S_0 = S$,

$S_n = E$, et pour tout $i < n$, S_i est un hyperplan de S_{i+1}. Un raisonnement facile par récurrence montre alors que pour résoudre ce cas, il suffit de résoudre le cas où S est un hyperplan de E. Soit donc u un élément de $E \setminus S$. Les formes linéaires sur E prolongeant f sont exactement les applications qui à tout $x + \lambda u$ ($x \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$) associent $f(x) + \lambda a$ pour un certain réel a; notons f_a la forme linéaire ci-dessus. La condition $f_a \leq p$ est équivalente à la condition

$$(\forall x \in S)(\forall \lambda \in \mathbb{R})\big(f(x) + \lambda a \leq p(x + \lambda u)\big) \tag{1.3}$$

Par hypothèse, (1.3) est réalisé pour $\lambda = 0$. Pour $\lambda \neq 0$, multiplions (1.3) par $1/|\lambda|$. Puisque p est positivement homogène, l'on voit que (1.3) est équivalent à l'énoncé suivant:

$$(\forall x, y \in S)\big(f(x) - p(x - u) \leq a \leq p(y + u) - f(y)\big). \tag{1.4}$$

Mais pour qu'il existe un nombre réel a satisfaisant (1.4), il faut et suffit que la condition suivante soit réalisée:

$$(\forall x, y \in S)\big(f(x) - p(x - u) \leq p(y + u) - f(y)\big),$$

i.e.,

$$(\forall x, y \in S)\big(f(x) + f(y) \leq p(x + u) + p(y - u)\big).$$

Mais ceci se vérifie par un calcul direct:

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) = p((x + u) + (y - u)) \leq p(x + u) + p(y - u).$$

Par suite, nous avons obtenu la réponse dans le cas où S est de codimension finie dans E.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. Soit $\mathbf{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels T de E contenant S tels que S soit de codimension finie dans T, et soit $\mathbf{P}$ l'ensemble de tous les couples (T, g) tels que $T \in \mathbf{V}$ et g est une forme linéaire sur T prolongeant f telle que $g \leq p_T$. Pout tout $T \in \mathbf{V}$, soit $\mathbf{P}_T = \{(U, g) \in \mathbf{P} \mid T \subseteq U\}$ (l'étude précédente du cas où S est de codimension finie dans E et la définition de $\mathbf{V}$ garantissent que $\mathbf{P}_T \neq \varnothing$) et soit $\mathcal{F}$ le filtre sur $\mathbf{P}$ engendré par $\{\mathbf{P}_T \mid T \in \mathbf{V}\}$. Par hypothèse, il existe une mesure de probabilité finiment additive μ sur $\mathfrak{P}(\mathbf{P})$ concentrée sur $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in E$, soit Φ_x l'application de $\mathbf{P}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\Phi_x((T, g)) = g(x)$ si $x \in T$, 0 sinon. Puisque l'égalité $-p(-x) \leq g(x) \leq p(x)$ a alors lieu, Φ_x est bornée, et l'on peut donc définir une application $\bar{f} \colon E \to \mathbb{R}$ en posant $\bar{f}(x) = \int \Phi_x \, \mathrm{d}\mu$. Si $x \in S$, alors Φ_x est la fonction constante de valeur $f(x)$ d'où $\bar{f}(x) = f(x)$; ainsi, $\bar{f}$ prolonge f. Pour tous x et y dans E, l'ensemble des (T, g) dans $\mathbf{P}$ tels que $\Phi_{x+y}((T, g)) = \Phi_x((T, g)) + \Phi_y((T, g))$ appartient à $\mathcal{F}$ (il contient $\mathbf{P}_{S+\mathbb{R}x+\mathbb{R}y}$), et par suite, $\bar{f}(x + y) = \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$. Il est beaucoup plus immédiat de vérifier que $\bar{f}(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. Enfin, pour tout x dans E, l'ensemble des (T, g) dans $\mathbf{P}$ tels que $\Phi_x((T, g)) \leq p(x)$ contient un élément de $\mathcal{F}$ (à savoir $\mathbf{P}_{S+\mathbb{R}x}$), d'où $\bar{f}(x) \leq p(x)$. Ainsi, nous avons obtenu (i). $\square$

Exercices du Chapitre 1

Exercice 1.1. On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est *bien fondé* quand toute partie non vide de E admet un élément minimal pour $\leq$.

Montrer que pour tout ensemble ordonné $(E, \leq)$, l'ensemble $\mathcal{I}$ des parties bien fondées de E est un *idéal* de $\mathfrak{P}(E)$, *i.e.*, que

$$\begin{cases} (\forall X \subseteq E)(\forall Y \in \mathcal{I})(X \subseteq Y \Rightarrow X \in \mathcal{I}), \\ (\forall X, Y \in \mathcal{I})(X \cup Y \in \mathcal{I}). \end{cases}$$

Exercice 1.2. On rappelle qu'un ensemble bien ordonné est un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide a un plus petit élément.

Montrer que si $(E, \leq)$ est un ensemble bien ordonné, alors tout segment initial de $(E, \leq)$ (*i.e.*, toute partie S de E telle que $(\forall x \in E)(\forall y \in S)(x \leq y \Rightarrow x \in S)$) différent de E est de la forme $\{x \in E \mid x < s\}$ pour un unique élément s de E.

Exercice 1.3. *

(a) Montrer *sans axiome du choix* la version "bien ordonnée" suivante du Lemme de Zorn: *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné non vide inductif. Supposons qu'il existe une fonction γ définie sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des chaînes non maximales (pour l'inclusion) de E telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\gamma(C)$ est un majorant strict de C. Alors E admet un élément maximal* (*n.b.*: c'est beaucoup moins difficile si l'on utilise les ordinaux. *Question subsidiaire, suppose la connaissance des axiomes de* ZF: Au prix de quel axiome cela se fait-il alors??).

Indication: Pour toutes parties X et Y de E, noter $X \lhd Y$ la relation "X est un segment initial de Y" (*voir* Exercice 1.2). De plus, pour tout $X \subseteq E$ et tout $z \in E$, on notera $X_{<z} = \{x \in X \mid x < z\}$. Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des parties *bien ordonnées* X de E telles que

$$(\forall x \in X)\big(x = \gamma(X_{<x})\big).$$

Montrer que pour tous X et Y dans $\mathbf{E}$, l'une des inégalités $X \lhd Y$ ou $Y \lhd X$ a lieu. On pourra pour cela montrer que si $X \neq Y$, alors la différence symétrique $Z = X \triangle Y$ admet un élément minimal, disons z; par exemple, $z \in X \setminus Y$; puis que $X_{<z} = Y_{<z}$; puis remarquer que $z = \gamma(X_{<z})$ et, si $Y_{<z} \neq Y$, utiliser le résultat de l'Exercice 1.2 pour arriver à une contradiction. Puis considérer la réunion de éléments de $\mathbf{E}$.

(b) En déduire que AC entraîne le Lemme de Zorn.

Exercice 1.4. Montrer l'équivalence entre AC, le Théorème de Zermelo et le Lemme de Zorn. ***Indication:*** Il n'est pas difficile de vérifier que le Théorème de Zermelo entraîne AC. Par l'Exercice 1.3, AC implique le Lemme de Zorn. Pour montrer que le Lemme de Zorn entraîne le Théorème de Zermelo, pour tout ensemble E, considérer l'ensemble $\mathbf{P}$ des relations de bon ordre sur les parties de E, muni de l'ordre $\lhd$ défini par "$X \lhd Y$ si et seulement si X est un segment initial de Y"; montrer que tout élément maximal de $\mathbf{P}$ est un bon ordre sur E.

Exercice 1.5. Montrer, en utilisant le Lemme de Zorn, que tout espace vectoriel (sur un corps quelconque) a une base.

Exercice 1.6. Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Montrer (en utilisant AC) que tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire dans E (*i.e.*, un sous-espace S de E tel que $E = F \oplus S$).

Exercice 1.7. * Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Montrer (en utilisant AC) que l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des sous-espaces vectoriels de E admet une *fonction de Banaschewski*, *i.e.*, une application π de $\mathcal{S}(E)$ vers $\mathcal{S}(E)$ satisfaisant

(a) $(\forall X \in \mathcal{S}(E))(X \oplus \pi(X) = E)$;
(b) $(\forall X, Y \in \mathcal{S}(E))(X \subseteq Y \Rightarrow \pi(Y) \subseteq \pi(X))$.

Exercice 1.8. Montrer sans utiliser aucune forme d'axiome du choix que le produit de *deux* espaces topologiques quasicompacts est quasicompact (on pourra considérer un recouvrement ouvert du produit par des ouverts élémentaires ["rectangles"]).

Exercice 1.9. Montrer que PIT est équivalent au *Théorème de la sous-base d'Alexander*, qui s'énonce de la façon suivante: "Soit X un espace topologique, soit $\mathcal{C}$ une sous-base de fermés de X, *i.e.*, un ensemble de fermés de X tel que tout fermé de X soit intersection *arbitraire* de réunions *finies* d'éléments de $\mathcal{C}$. Alors X est quasicompact si et seulement si toute partie centrée de $\mathcal{C}$ est d'intersection non vide." ***Indication:*** en supposant PIT, montrer que tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X est convergent; montrer pour cela que $\bigcap(\mathcal{U} \cap \mathcal{C})$ est non vide, et que si a appartient à cet ensemble, alors $\mathcal{U}$ converge vers a. Réciproquement, montrer par exemple que le Théorème de la sous-base d'Alexander implique que le produit d'une famille d'espaces topologiques compacts est compact).

Exercice 1.10. Soit X un espace topologique compact. On munit l'ensemble $\mathcal{K}(X)$ des parties fermées de X de la topologie la plus grossière pour laquelle pour tout $A \in \mathcal{K}(X)$, les ensembles suivants sont fermés:

$$\mathcal{F}^*(A) = \{K \in \mathcal{K}(X) \mid K \cap A \neq \varnothing\},$$
$$\mathcal{F}_*(A) = \{K \in \mathcal{K}(X) \mid K \subseteq A\}.$$

(a) Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont deux familles de fermés de X, alors

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}^*(A_i) \cap \bigcap_{j\in J} \mathcal{F}_*(B_j) \neq \varnothing$$

si et seulement si pour tout $i \in I$, $A_i \cap \bigcap_{j\in J} B_j \neq \varnothing$.
(b) En conclure que $\mathcal{K}(X)$ muni de cette topologie est compact (on pourra utiliser le Théorème de la sous-base d'Alexander, *voir* Exercice 1.9).

Exercice 1.11. Montrer que le Théorème de Tychonoff pour les espaces *quasicompacts* entraîne l'axiome du choix (***Indication:*** si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vides, considérer un objet noté ∞ qui n'appartient à aucun des X_i, puis pour tout $i \in I$, munir $Y_i = X_i \cup \{\infty\}$ de la topologie [ayant pour ensemble d'ouverts] $\{\varnothing, \{\infty\}, Y_i\}$. Pour tout $i \in I$, considérer

$$F_i = \left\{ x \in \prod_{j\in I} Y_j \mid x_i \in X_i \right\},$$

et montrer que $\{F_i \mid i \in I\}$ est un ensemble centré de fermés.)

Exercice 1.12. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble X. Montrer que les $\bigcap \mathcal{U} \neq \varnothing$ si et seulement si $\mathcal{U}$ est principal (*i.e.*, si et seulement si c'est l'ensemble des parties de X contenant une partie non vide donnée de X), si et seulement si il existe $a \in X$ tel que $\mathcal{U} = \{Y \subseteq X \mid a \in Y\}$. Montrer que *tout ultrafiltre sur un ensemble fini est principal.*

Exercice 1.13. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble X. Montrer que l'ensemble des parties $\mathcal{F}$-stationnaires de X est un filtre si et seulement si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

Exercice 1.14. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble X. Montrer que l'ensemble des parties $\mathcal{F}$-stationnaires de X est un filtre si et seulement si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

Exercice 1.15. Soit X un espace topologique compact et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Montrer que si $\mathcal{F}$ admet une seule valeur d'adhérence, alors celle-ci est limite de $\mathcal{F}$.

Exercice 1.16. Soient X un ensemble, Y un espace topologique, f une application de X vers Y et $\mathcal{F}$ un filtre sur X.

(a) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f_*\mathcal{F}$ est exactement l'intersection $\bigcap_{U\in\mathcal{F}} \operatorname{Cl} f[U]$.
(b) Montrer que $f_*\mathcal{F}$ converge vers un élément y de Y si et seulement si pour tout voisinage V de y, $f^{-1}[V] \in \mathcal{F}$.

Dans le cas (b) et pour Y *séparé*, on a unicité de la limite (*voir* l'Exercice 1.14), on la note alors $\lim_{\mathcal{F}} f$ (limite de f par rapport à $\mathcal{F}$).

Exercice 1.17. * Le but de (a) et (b) de l'exercice suivant est de montrer que PIT entraîne que *tout anneau commutatif unitaire non trivial admet un idéal premier* (***Note:*** avec AC, l'on peut remplacer "premier" par "maximal" et ceci est la version classique du Théorème de Krull; en fait, cette version est équivalente à AC, *voir* [**Hodg**]).

(a) Montrer que l'on peut démontrer sans AC le "Théorème de Krull" pour les anneaux commutatifs *dénombrables*, à savoir: *Tout anneau commutatif unitaire dénombrable non trivial admet un idéal maximal* (reprendre le raisonnement usuel!)
(b) Conclure. (***Indication:*** Si R est un anneau commutatif unitaire non trivial, on pourra utiliser l'ensemble $\mathbf{P}$ des couples $(S, \mathfrak{p})$ tels que S est un sous-anneau commutatif unitaire non trivial *dénombrable* de R et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de S, et pour tout sous-anneau commutatif unitaire non trivial dénombrable S de R, $\mathbf{P}_S = \{(T, \mathfrak{p}) \in \mathbf{P} \mid S \subseteq T\}$; considérer le filtre engendré par les $\mathbf{P}_S$).
(c) Généraliser (a) au cas des anneaux commutatifs unitaires non triviaux *bien ordonnés* (utiliser l'Exercice 1.3).

Exercice 1.18. * Un *graphe* est, par définition, un ensemble G muni d'une relation binaire ρ qui est antiréflexive et symétrique. Si k est un entier naturel non nul, on dit alors que (G, ρ) est *k-coloriable* quand il existe une application f de G vers k (identifié à $\{0, 1, \ldots, k-1\}$) telle que

$$(\forall x, y \in G)\big(x\rho y \Rightarrow f(x) \neq f(y)\big).$$

Montrer (en utilisant PIT) que (G, ρ) est k-coloriable si et seulement si toute partie finie de G (munie de la restriction de ρ) est k-coloriable.

Exercice 1.19. * Montrer (en utilisant PIT) que pour tout ensemble ordonné $(E, \leq)$, $\leq$ est l'intersection des relations d'ordre total sur E contenant $\leq$. (Le plus difficile est de le faire dans le cas *fini*).

Exercice 1.20. * Montrer (en utilisant PIT) que pour tout groupe abélien ordonné sans torsion G, il existe un ordre total $\leq$ sur G compatible avec l'addition (*i.e.*, $x \leq y$ implique que $x + z \leq y + z$). (***Indication:*** remarquer que si G est finiment engendré, alors il est isomorphe à un certain $\mathbb{Z}^n$. Dans le cas général, utiliser PIT).

EXERCICE 1.21. * Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit qu'une partie A de P est *incomparable* quand pour tous éléments distincts a et b de A, on n'a ni $a \leq b$ ni $b \leq a$. La *largeur* de P est alors, par définition, le plus grand cardinal des parties incomparables de P, et on la notera $\operatorname{wd} P$ ('wd' pour 'width'). Le but de cet exercice est de montrer le *théorème de Dilworth*, *voir* [**Dilw1**], à savoir *pour tout entier naturel n, tout ensemble ordonné de largeur n est la réunion de n chaînes.*

(a) Montrer que si P est de largeur n avec $n > 0$, alors P ne peut pas être réunion de $n-1$ chaînes.
(b) Montrer que si le théorème de Dilworth est vrai pour les ensembles ordonnés finis, alors il l'est pour tout ensemble ordonné (on pourra utiliser PIT).

La suite de cet exercice est de montrer le théorème de Dilworth pour P *fini*. La preuve présentée ici est due à F. Galvin [**Galv**]. On raisonne par récurrence sur le cardinal $|P|$ de P. Supposons le théorème montré à tout rang strictement inférieur à $|P|$. Fixons-nous un élément maximal a de P (pourquoi en existe-t-il?), posons $Q = P \setminus \{a\}$ et $n = \operatorname{wd} Q$.

(c) Pourquoi existe-t-il n chaînes non vides deux à deux disjointes C_i $(i < n)$ de Q telles que $Q = \bigcup_{i<n} C_i$?
(d) Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties incomparables de Q de cardinal n. Montrer que tout élément de $\mathcal{A}$ rencontre chaque C_i en exactement un point.
(e) Montrer que pour tout $i < n$, l'ensemble des éléments de C_i appartenant à au moins un élément de $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément, que nous noterons a_i. Montrer que $A = \{a_i \mid i < n\}$ appartient à $\mathcal{A}$.
(f) Si $A \cup \{a\}$ est incomparable, montrer que $\operatorname{wd} P = n+1$. Conclure dans ce cas.
(g) Supposons désormais que $A \cup \{a\}$ n'est pas incomparable. Montrer qu'il existe $i < n$ tel que $a_i < a$.
(h) Soit $K = \{x \in C_i \mid x \leq a_i\} \cup \{a\}$. Montrer que K est une chaîne et que $\operatorname{wd}(P \setminus K) < n$. Conclure.

EXERCICE 1.22. ** Soient X et Y deux ensembles et soit Γ une partie de $X \times Y$. Pour tout ensemble fini Z, on note $|Z|$ le cardinal de Z et pour tout $U \subseteq X$, on note

$$\Gamma[U] = \big\{y \in Y \mid (\exists x \in X)\big((x, y) \in \Gamma\big)\big\}.$$

On suppose les conditions suivantes réalisées:

(a) Pour tout $x \in X$, $\Gamma[\{x\}]$ est fini.
(b) Pour toute partie finie U de X, l'égalité $|\Gamma[U]| \geq |U|$ a lieu.

Montrer qu'il existe une *injection* f de X dans Y telle que

$$(\forall x \in X)\big((x, f(x)) \in \Gamma\big).$$

Noter que la condition (b) est trivialement nécessaire. Trouver un contrexemple montrant que la condition (a) ne peut être supprimée.

(***Note:*** c'est le "Lemme des mariages" en version infinie; le plus difficile est une fois de plus de montrer la version finie; puis appliquer le Théorème de Tychonoff au produit des espaces discrets $\Gamma[\{x\}]$ pour $x \in X$).

EXERCICE 1.23. Soit X un ensemble, soit μ une mesure finiment additive (mais pas forcément positive) sur $\mathfrak{P}(X)$. On dit que μ est *bornée* quand il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$(\forall Y \subseteq X)\big(|\mu(Y)| \leq C\big),$$

et le plus petit C avec cette propriété est alors noté $\|\mu\|$. Notons encore $\bar{\mu}$ l'opération d'intégration par rapport à μ sur $\mathcal{S}(X)$.

(a) Montrer que si $\bar{\mu}$ est continue, alors μ est bornée.
(b) Montrer que si I est un ensemble fini et $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres réels, alors il existe une partie J de I telle que
$$\left|\sum_{i\in J} x_i\right| \geq \frac{1}{2}\sum_{i\in I}|x_i|.$$
(c) En déduire que si μ est bornée, alors $\bar{\mu}$ est continue et $\|\bar{\mu}\| \leq 2\|\mu\|$.

Ainsi, nous avons montré que $\bar{\mu}$ est continue si et seulement si μ est bornée. Par suite, si μ est bornée, alors $\bar{\mu}$ se prolonge en une seule forme linéaire continue sur $\mathcal{B}(X)$.

Exercice 1.24. Soient X et Y deux ensembles et soit φ une application de X vers Y.

(a) Montrer que pour tout $s \in \mathcal{S}(Y)$, la *formule du changement de variable* suivante a lieu:
$$\int (s\circ\varphi)\,\mathrm{d}\mu = \int s\,\mathrm{d}(\varphi_*\mu).$$
(On pourra se ramener au cas où s est une fonction caractéristique).
(b) En utilisant l'Exercice 1.23, montrer que si μ est bornée, alors pour tout $f \in \mathcal{B}(Y)$,
$$\int (f\circ\varphi)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}(\varphi_*\mu).$$

Exercice 1.25. Généraliser la théorie de l'intégration par rapport à une mesure positive [bornée] aux fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$. (***Indication:*** on définit de la même manière l'intégrale des fonctions simples, mais pour $f\colon X \to [0, +\infty]$, on définit
$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int s\,\mathrm{d}\mu \mid s \text{ simple } \leq f\right\},$$
et on montre que $\bar{\mu}$ ainsi définie est un homomorphisme de monoïdes). Montrer que la formule du changement de variable (*voir* l'Exercice 1.24) reste valable.

Exercice 1.26. Montrer que HB entraîne que pour tout ensemble infini X, il existe une mesure de probabilité finiment additive μ sur $\mathfrak{P}(X)$ telle que pour tout $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.

Exercice 1.27. Montrer, en utilisant le Théorème de Hahn-Banach, qu'il existe une mesure de probabilité finiment additive μ sur $\mathfrak{P}(\mathbb{Z})$ qui est *invariante par translation*, *i.e.*, telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $X \subseteq \mathbb{Z}$, l'égalité $\mu(n+X) = \mu(X)$ a lieu (où $n+X = \{n+x \mid x \in X\}$). (***Indication:*** soit ν une mesure de probabilité finiment additive sur $\mathbb{Z}$ telle que $(\forall n \in \mathbb{Z})(\nu(\{n\}) = 0)$—*voir* l'Exercice 1.26. Poser $\mu(X) = \int\big(|X \cap [-n, n]|\big)/2n\,\mathrm{d}\nu(n)\big)$. (***Note:*** on dit que $\mathbb{Z}$ est *moyennable*).

Exercice 1.28. On dit qu'un groupe G est *moyennable* quand il existe une mesure de probabilité finiment additive invariante par translation sur G.

(a) Montrer que tout groupe fini est moyennable.
(b) Montrer que si G est un groupe moyennable et si H est un sous-groupe distingué de G, alors G/H est moyennable.

(c) Montrer que si G est un groupe et H est un sous-groupe distingué de G tel que H et G/H sont moyennables, alors G est moyennable.
(d) * Montrer que tout groupe commutatif est moyennable (s'inspirer de la preuve de l'Exercice 1.27). En déduire que tout groupe résoluble est moyennable.
(e) * Montrer que tout sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable.
(f) * Montrer que toute limite inductive filtrante de groupes moyennables est moyennable.

(***Note:*** il existe des groupes non moyennables, l'exemple le plus facile étant le groupe libre à deux générateurs. Je renvoie à [**Gree**] pour plus de détails sur les groupes moyennables—en américain, "amenable groups").

Exercice 1.29. * On se propose de montrer dans cet exercice que *le Théorème de Hahn-Banach entraîne l'existence d'une partie de* $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ *qui n'a pas la propriété de Baire* (*voir* [**Pinc2**]). On rappelle que si X est un espace topologique, une partie Y de X est *rare* (resp., *maigre*) quand $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} Y) = \varnothing$ (resp., quand Y est réunion dénombrable d'ensembles rares); que Y est *résiduel* quand $X \setminus Y$ est maigre; que Y a la *propriété de Baire* quand il existe un ouvert U tel que $U \triangle Y$ est maigre; que si Z est un autre espace topologique et si $f\colon X \to Y$, alors f a la *propriété de Baire* quand pour tout ouvert V de Y, $f^{-1}[V]$ a la propriété de Baire dans X. Je renvoie à [**Oxto**] pour plus de détails. *Il est recommandé d'avoir quelques notions sur tout ceci pour résoudre l'exercice*; *voir* à ce sujet l'Exercice 4.7.

(a) Munissons $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ de sa topologie compacte naturelle (obtenue par $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$). Soit S une partie résiduelle de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Montrer qu'il existe a, b, c dans S tels que c est la réunion disjointe de a et b (***Indication:*** soient φ et ψ les applications de $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ définies respectivement par $(x,y) \mapsto x \cap y$ et $(x,y) \mapsto x \setminus y$; prouver que l'ensemble

$$(S \times \mathfrak{P}(\mathbb{N})) \cap \varphi^{-1}[S] \cap \psi^{-1}[S]$$

est dense dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \times \mathfrak{P}(\mathbb{N})$).

(b) Soit μ une mesure positive finiment additive sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ qui ait la propriété de Baire (en tant qu'application de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathbb{R}$). Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs de somme 1 telle que $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_n$, *i.e.*,

$$(\forall X \subseteq \mathbb{N}) \left(\mu(X) = \sum_{n\in X} p_n \right).$$

(***Indication:*** Quitte à remplacer μ par $\mu - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\})\delta_n$, on peut supposer que $\mu(\{n\}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; définir sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ une relation d'équivalence $\sim$ par

$$x \sim y \iff (\exists n \in \mathbb{N})(x \setminus n = y \setminus n);$$

montrer qu'il existe une partie résiduelle S de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, invariante par $\sim$, telle que $\mu\restriction_S$ soit continue; noter que pour tout $x \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, la restriction de μ à la classe d'équivalence $[x]$ de x pour $\sim$ est constante, et que $[x]$ est dense dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$; en déduire que $\mu\restriction_S$ est une constante, disons γ; en utilisant (a), montrer que $2\gamma = \gamma$, d'où $\gamma = 0$; puis montrer que tout élément z de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ s'écrit $x \triangle y$ pour certains x et y dans S—pour ce faire, noter que S et $\{z + s \mid s \in S\}$ sont résiduels; en déduire $\mu = 0$).

(c) En déduire que si μ est une mesure de probabilité finiment additive sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 0$ (*voir* l'Exercice 1.26), alors μ n'a pas la propriété de Baire.

Note: par contraste, il est possible de montrer qu'il existe des mesures de probabilité finiment additives sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ qui sont *mesurables* pour toute mesure donnée à l'avance sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (et même, sous par exemple l'hypothèse du continu, pour *toutes* les mesures boréliennes régulières sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$—on parle alors de "mesures médiales", ou "limites médiales"); *voir* [**DeMe**] pour les détails.

Exercice 1.30. Cet exercice requiert des rudiments de théorie des modèles (essentiellement les définitions). On se propose de montrer que *tout modèle topologiquement compact d'une théorie donnée est atomiquement compact.*

Si M est un modèle d'un langage (signature) $\mathcal{L}$, un *système atomique* sur M est un ensemble de formules atomiques à paramètres dans M, à variables parmi un certain ensemble (*non nécessairement fini*) $\{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$ de symboles de variable ("inconnues"); une *solution* de ce système atomique est alors une famille $(x_i)_{i\in I} \in M^I$ qui vérifie toutes les formules atomiques du système. Un système atomique Σ est *résoluble* quand il admet une solution, *finiment résoluble* quand toute partie finie de Σ est résoluble. On dit que M est *atomiquement compact* quand tout système atomique finiment résoluble sur M est résoluble. On dit que M est *topologiquement compact* quand il peut être muni d'une topologie compacte pour laquelle les interprétations des symboles de fonction sont continues et les interprétations des symboles de relation sont fermées. On suppose par la suite que M est muni d'une telle topologie.

(a) Montrer que l'ensemble des solutions d'une formule atomique à inconnues parmi $\{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$ est un fermé de M^I.

(b) En déduire (en utilisant PIT) que M est atomiquement compact. ***Note:*** La réciproque est fausse (et nul besoin de contrexemples pathologiques pour cela—par exemple $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ pour les groupes abéliens, ou toute algèbre de Boole complète non atomique pour les algèbres de Boole...).

Exercice 1.31. * Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble X et soit $f\colon X \to X$ telle que $f_*\mathcal{U} = \mathcal{U}$. On se propose de montrer que l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) = x\}$ appartient à $\mathcal{U}$.

Pour commencer, on admettra le résultat de l'Exercice 1.19 (dont le résultat dépend de PIT), et on fixera une relation d'ordre total $\leq$ sur X. Posons $U = \{x \in X \mid x < f(x)\}$ et $V = \{x \in X \mid f(x) < x\}$.

(a) Montrer qu'il suffit de prouver que U et V n'appartiennent pas à $\mathcal{U}$.

Par la suite, on raisonnera par l'absurde, en supposant par exemple que $U \in \mathcal{U}$.

(b) Pour tout $x \in U$, soit $l(x)$ le plus grand entier naturel n *s'il existe* (quand n'existe-t-il pas?) tel que $x < f(x) < f^2(x) < \ldots < f^n(x)$. Pour tout $i < 2$, soit $U_i = \{x \in U \mid l(x) \equiv i \pmod 2\}$. Montrer que $U_i \cap f^{-1}[U_i] = \varnothing$; en déduire que $U_0 \cup U_1 \notin \mathcal{U}$.

(c) (utilise AC) Soit $U' = \{x \in U \mid (\forall n \in \mathbb{N})(f^n(x) < f^{n+1}(x))\}$. On définit une relation binaire $\equiv$ sur U' par

$$x \equiv y \iff (\exists p, q \in \mathbb{N})(f^p(x) = f^q(y))\}.$$

(c1) Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur U'.

(c2) En utilisant AC, montrer qu'il existe une application π de U' vers U' telle que ($\bullet$) pour tout $x \in U'$, $\pi(x)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de x modulo $\equiv$, et ($\bullet\bullet$) pour tout $x \in U'$, $\pi(x) \equiv x$.

(c3) Pour tout $x \in U'$, soit $h(x)$ le plus petit entier naturel de la forme $k + m$ où $f^k(x) = f^m(\pi(x))$. Pour tout $i < 2$, posons $U'_i = \{x \in U' \mid h(x) \equiv i \pmod 2\}$. Montrer que $f^{-1}[U'_i] \cap U' = U'_{1-i}$. En déduire que $U' \notin \mathcal{U}$. Conclure.

Notes du Chapitre 1

Le Théorème de Zermelo fut prouvé par E. Zermelo en 1904 [**Zerm**]. Le Lemme de Zorn est dû à C. Kuratowski en 1922 [**Kura**] et M. Zorn en 1935 [**Zorn**]. K. Gödel a montré en 1938 que AC (avec en prime l'hypothèse généralisée du continu GCH) était cohérent avec ZF (*voir* [**Godl1,2**]). Par ailleurs, A. A. Fraenkel avait déjà montré en 1922 [**Frae1,2**] que l'axiome du choix ne résultait pas de ZFA, "théorie des ensembles avec atomes", mais il a fallu attendre P. Cohen en 1963 [**Cohe1–4**] pour montrer (par la méthode du forcing en théorie des ensembles) que AC n'était pas une conséquence de ZF. Par suite, AC *est indépendant de* ZF. Le fait que PIT n'implique pas AC a d'abord été montré par Halpern en 1964 pour la théorie des ensembles avec atomes ZFA, puis par Halpern et Levy en 1967 [**HaLe**] pour ZF. Comme l'a montré D. Pincus (*voir* [**Pinc1**, **Pinc2**], et aussi [**PiSo**] pour des résultats plus forts), le Théorème de Hahn-Banach n'entraîne pas PIT. Ainsi, on observe la hiérarchie suivante: *AC est strictement plus fort que PIT, qui est strictement plus fort que HB.* C'est une question naturelle de se demander à quel point AC est plus fort que PIT, et à quel point PIT est plus fort que HB. La réponse est dans tous les cas "pas tellement"... par exemple, c'est encore un problème ouvert de savoir si la conjonction de PIT et de "l'axiome des choix dénombrables dépendants" DC est équivalente à AC—*voir* [**Pinc3**] (alors que PIT est strictement plus fort que la conjonction de HB et DC). Il aurait été agréable par ailleurs que PIT ou HB soient cohérents avec des énoncés plus agréables quant à la structure topologique de la droite réelle $\mathbb{R}$, mais cela ne semble pas être le cas: il est connu depuis 1938 [**Sier**] que PIT entraîne l'existence de parties non mesurables de $\mathbb{R}$; il est connu depuis 1974 [**Pinc2**] que HB entraîne l'existence de parties de $\mathbb{R}$ qui n'ont pas la propriété de Baire (*voir* aussi l'Exercice 1.29, qui donne en fait la partie essentielle de l'argument), et finalement depuis 1991 [**FoWe**] que HB entraîne l'existence de parties non mesurables de $\mathbb{R}$ (*voir* l'Exercice 11.10 pour un début). Par suite, ni PIT ni même HB ne sont cohérents avec la mesurabilité ou la propriété de Baire de toute partie de $\mathbb{R}$; par contre, DC l'est (*voir* [**Solo**]—la cohérence de l'existence d'un cardinal inaccessible est suffisante, et d'ailleurs nécessaire, pour la partie correspondant à la mesurabilité).

CHAPITRE 2

Treillis, algèbres de Boole; Théorème de Stone

La notion essentielle abordée dans ce chapitre est celle d'*algèbre de Boole*. Des exemples d'algèbres de Boole sont les algèbres $\mathfrak{P}(X)$ où X est un ensemble quelconque, mais aussi l'algèbre des parties mesurables (pour la mesure de Lebesgue) de $[0, 1]$, ou encore l'algèbre des parties x de $\mathbb{N}$ telles que soit x soit $\mathbb{N} \setminus x$ est fini. La notion d'algèbre de Boole fournit un cadre axiomatique à tous ces exemples. En théorie des probabilités, la notion d'algèbre de Boole correspond à la notion de "clan", alors qu'une "tribu" est essentiellement une algèbre de Boole σ-complète.

Dans ce qui suit, nous nous inspirerons en grande partie de la présentation de P. Johnstone dans [**John**].

Soit d'abord $(E, \leq)$ un ensemble ordonné (*i.e.*, un ensemble E muni d'une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive $\leq$—en américain, "partially ordered set", ou "poset"). Pour toute partie S de E, nous noterons $\bigvee S$ (resp., $\bigwedge S$) la borne supérieure (resp., la borne inférieure) de S quand elle existe; de plus, si $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, alors nous écrirons $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ (resp., $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$) au lieu de $\bigvee\{a_1, \ldots, a_n\}$ (resp., $\bigwedge\{a_1, \ldots, a_n\}$), et si $\bigvee \varnothing$ existe (*i.e.*, E admet un plus petit élément), alors on le note 0. Si toute paire de E admet une borne supérieure, alors la loi de composition interne $\vee$ satisfait les lois

$$\begin{cases} (\forall x)(x \vee x = x) & \text{(idempotence)}, \\ (\forall x, y)(x \vee y = y \vee x) & \text{(commutativité)}, \\ (\forall x, y, z)\big(x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z\big) & \text{(associativité)}, \end{cases}$$

i.e., $(E, \vee)$ est un semi-groupe commutatif dans lequel tout élément est idempotent. Réciproquement, si $(E, +)$ est un semi-groupe commutatif dans lequel tout élément est idempotent, il est facile de vérifier que l'on peut définir une relation d'ordre $\leq$ sur E par

$$x \leq y \Longleftrightarrow x + y = y,$$

et que pour tous x, y dans E, $x + y$ est la borne supérieure de $\{x, y\}$ pour $\leq$. Ceci nous amène à la définition suivante:

Définition. Un *sup-demi-treillis* est un triplet $(S, \vee, \leq)$ où $\leq$ est une relation d'ordre sur S et pour tous x et y dans S, $x \vee y$ est la borne supérieure de $\{x, y\}$.

Notons que nécessairement, la loi de composition interne $\vee$ est commutative et idempotente (*voir* la définition suivante).

Notons qu'il existe aussi la notion duale d'*inf-demi-treillis*: un inf-demi-treillis est donc un triplet $(S, \wedge, \leq)$ où $\leq$ est une relation d'ordre sur S et pour tous x et y dans S, $x \wedge y$ est la borne inférieure de $\{x, y\}$. Il est à noter que si l'ordre est supprimé du langage, les notions de sup-demi-treillis et d'inf-demi-treillis deviennent *indiscernables*; on parle alors naturellement de demi-treillis:

Définition. Un *demi-treillis* est un semi-groupe commutatif dans lequel tout élément est idempotent.

Via les identifications précédentes, nous dirons aussi qu'un sup-demi-treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire admet une borne supérieure, *etc.*. D'autres changements de langage fréquemment rencontrés sont les suivants: par exemple, un *sup-demi-treillis avec* 0 (resp., *avec* 1) est un *quadruplet* $(S, \vee, \leq, 0)$ (resp., $(S, \vee, \leq, 1)$) tel que $(S, \vee, \leq)$ est un sup-demi-treillis et 0 (resp., 1) est le plus petit (resp., plus grand) élément de S. On définit de même un inf-demi-treillis avec 0 ou avec 1. On dit souvent qu'un (inf- ou sup-) demi-treillis est *borné* quand il a un plus petit et un plus grand élément. Il est à noter que chaque changement de langage (par exemple de $(+, \leq)$ à $(+, \leq, 0)$) s'accompagne d'un changement correspondant de la notion d'homomorphisme (même si les structures sont "les mêmes"—*voir* par exemple l'Exercice 2.2).

La notion de *treillis* est la combinaison naturelle des notions de sup-demi-treillis et d'inf-demi-treillis:

Définition. Un *treillis* est un ensemble ordonné dans lequel toute paire admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Par suite, dans un treillis, toute partie finie *non vide* admet une borne inférieure et une borne supérieure. Si, de plus, l'on exige par exemple que la partie vide a une borne supérieure (resp., inférieure), cela signifie, par définition de la borne supérieure, que l'ensemble sous-jacent admet un plus petit (resp., plus grand) élément.

De façon générale, l'on voit qu'un treillis est un ensemble E qui peut être muni de deux lois de composition interne $\vee$ et $\wedge$ qui sont respectivement le sup et l'inf (des paires d'éléments de E) pour une certaine relation d'ordre sur E.

Remarque. De la même façon que pour les demi-treillis, nous parlerons parfois de "treillis avec 0" ou de "treillis avec 1" ou de "treillis bornés".

Définition. Si $\mathcal{E} = (E, \wedge, \vee, \leq)$ est un treillis, alors son *treillis dual* est

$$\mathcal{E}^\circ = (E, \vee, \wedge, \geq).$$

Notons qu'en particulier, le dual d'un treillis avec 0 est un treillis avec 1, *etc.*.

Notons qu'alors, l'identité est un *anti-isomorphisme* de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}^\circ$. Par suite, l'on obtient le résultat suivant:

Théorème 2.1 (Principe de dualité pour les treillis). *Si θ est un théorème vrai pour tous les treillis, alors le* théorème dual *obtenu en remplaçant (dans θ) $\vee$ par $\wedge$ et réciproquement (et, s'il y a lieu,* 0 *par* 1 *et réciproquement) et $\leq$ par $\geq$ et réciproquement, est un théorème vrai pour tous les treillis.*

Proposition 2.2. *Soient $\vee$ et $\wedge$ des lois de composition internes sur un ensemble E, telles que $(E, \vee)$ et $(E, \wedge)$ sont des demi-treillis. Alors $(E, \vee, \wedge)$ est un treillis si et seulement si il satisfait les deux* lois d'absorption *suivantes:*

$$x \wedge (x \vee y) = x; \qquad x \vee (x \wedge y) = x$$

(pour tous x, y dans E).

Preuve. Si $(E, \vee, \wedge)$ est un treillis, les lois d'absorption sont immédiatement vérifiées dans E. Réciproquement, si les lois d'absorption sont satisfaites par E,

alors pour tous x, y dans E, les égalités $x \wedge y = x$ et $x \vee y = y$ sont équivalentes, donc les relations d'ordre associées à $(E, \vee)$ et à $(E, \wedge)$ sont les mêmes. Le reste est facile. $\square$

La théorie des treillis peut donc être axiomatisée dans le langage $(\vee, \wedge)$ par la liste suivante d'axiomes:

$$\begin{cases} (\forall x)(x \vee x = x \wedge x = x); \\ (\forall x, y)(x \vee y = y \vee x \text{ et } x \wedge y = y \wedge x); \\ (\forall x, y, z)(x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \text{ et } x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z); \\ (\forall x, y)(x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x). \end{cases}$$

En général, la notion standard d'homomorphisme que nous utiliserons pour la classe des treillis sera celle d'homomorphisme dans le langage $(\vee, \wedge)$.

Définition. Un treillis est *distributif*, si la loi $\wedge$ y est distributive sur la loi $\vee$.

On aurait également pu définir une notion similaire en utilisant cette fois la *loi de distributivité duale* (*i.e.*, de $\vee$ sur $\wedge$). En fait, c'est la même chose:

Proposition 2.3. *Dans tout treillis, la loi de distributivité et la loi de distributivité duale sont équivalentes.*

Preuve. En utilisant le principe de dualité (Théorème 2.1), on voit qu'il suffit de vérifier que la loi de distributivité entraîne la loi de distributivité duale. Supposons donc que E est un treillis dans lequel $\wedge$ est distributive sur $\vee$. Alors pour tous x, y, et z dans E,

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\ &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\ &= x \vee (y \wedge z). \end{aligned}$$

$\square$

Remarque. L'équivalence entre distributivité et distributivité duale *infinie* n'est pas vraie (*voir* l'Exercice 2.4).

Définition. Soit $(E, \vee, \wedge, 0, 1)$ un treillis borné et soient a et b deux éléments de E. Alors a et b sont *complémentaires*, si $a \vee b = 1$ et $a \wedge b = 0$. On dit alors que b est un *complément* (ou *complémentaire*) de a. Si tout élément de E admet un complément, on dit que E est *complémenté*.

Définition. Une *algèbre de Boole* est un treillis *distributif* complémenté (donc borné).

À ce sujet, *voir* l'Exercice 2.9. Noter que pour tout ensemble X, $(\mathfrak{P}(X), \cup, \cap, \varnothing, X)$ (noté tout simplement $\mathfrak{P}(X)$) est une algèbre de Boole, dans laquelle pour tout élément Y, $\neg Y = X \setminus Y$. Une algèbre de Boole fondamentale est $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ munie de $\wedge$ et $\vee$ donnés par les "tables de vérité" suivantes:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

et

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Une autre algèbre de Boole beaucoup moins intéressante mais hélas difficilement évitable est l'algèbre de Boole triviale $\mathbf{1} = \{0\}$ (elle est la seule à satisfaire $0 = 1$).

LEMME 2.4. *Dans un treillis distributif borné, tout élément admet au plus un complément.*

PREUVE. Soit E un treillis distributif borné et soit a un élément de E. Supposons que x et y soient des compléments de a. Alors

$$x = x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee (x \wedge a) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y,$$

et de façon similaire, $y = x \wedge y$. Par suite, $x = y$. □

(*Voir* l'Exercice 2.9 pour le cas non distributif!)

Par suite, dans une algèbre de Boole, tout élément a admet un complément unique, noté $\neg a$. Le *langage des algèbres de Boole* est ordinairement compris comme étant $(\vee, \wedge, 0, 1, \neg)$. Ainsi, une axiomatisation de la théorie des algèbres de Boole dans ce langage est la suivante:

$$\begin{cases} (\forall x)(x \vee x = x \wedge x = x); \\ (\forall x, y)(x \vee y = y \vee x \text{ et } x \wedge y = y \wedge x); \\ (\forall x, y, z)(x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \text{ et } x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z); \\ (\forall x)(x \vee 0 = 0 \vee x = x \wedge 1 = 1 \wedge x = x); \\ (\forall x, y)(x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x); \\ (\forall x, y, z)(x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)); \\ (\forall x)(x \vee \neg x = 1 \text{ et } x \wedge \neg x = 0). \end{cases}$$

LEMME 2.5 (lois de DeMorgan). *Toute algèbre de Boole satisfait les deux lois suivantes:*

$$(\forall x, y)\big(\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \text{ et } \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y\big).$$

PREUVE. Soit B une algèbre de Boole. Par unicité de l'opération de complémentation sur B, $\neg$ est *involutive*; par suite, on voit facilement que $\neg$ est une bijection décroissante de B sur lui-même. Puisque $\vee$ et $\wedge$ se définissent à partir de $\leq$, la conclusion s'ensuit immédiatement. □

Il existe une autre caractérisation classique (et très utile!) des algèbres de Boole, venue de la théorie des anneaux:

DÉFINITION. Un *anneau de Boole* est un anneau unitaire satisfaisant l'axiome

$$(\forall x)(x^2 = x).$$

LEMME 2.6. *Tout anneau de Boole est commutatif et satisfait l'axiome*

$$(\forall x)(2x = 0).$$

PREUVE. Soient a et b deux éléments quelconques d'un anneau de Boole. Alors

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + b + ab + ba,$$

d'où $ab + ba = 0$. En particulier, dans le cas $a = b$, on obtient $2a = 0$. Dans le cas général, on obtient $ba = -ab = ab$. □

On en déduit dans le Lemme suivant l'équivalence entre les anneaux de Boole et les algèbres de Boole:

PROPOSITION 2.7.

(a) *Soit* $(A, +, \cdot, 0, 1)$ *un anneau de Boole; soient* $\wedge$ *et* $\vee$ *les deux lois de composition internes définies sur* A *par*

$$x \wedge y = x \cdot y; \qquad x \vee y = x + y + x \cdot y.$$

Alors $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *est une algèbre de Boole.*

(b) *Soit* $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *une algèbre de Boole; soient* $+$ *et* $\cdot$ *les deux lois de composition internes définies sur* A *par*

$$x + y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x); \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Alors $(A, +, \cdot, 0, 1)$ *est un anneau de Boole.*

(c) *Les deux constructions en* (a) *et en* (b) *sont inverses l'une de l'autre.*

(d) *Soient* A *et* B *deux algèbres de Boole, soit* f *une application de* A *vers* B*. Alors* f *est un homomorphisme d'algèbres de Boole si et seulement si* f *est un homomorphisme d'anneaux de Boole. De plus,*

$$(\forall x, y \in A)\big(f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow f(x \wedge \neg y) = 0\big).$$

(e) *Soient* A *et* B *deux algèbres de Boole, et soit* f *un homomorphisme d'algèbres de Boole de* A *vers* B*. Alors* f *est injectif si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

PREUVE. Les preuves de (a), (b), et (c) sont de simples vérifications. De plus, la première partie de (d) est une conséquence immédiate de (a), (b), (c). Pour vérifier la seconde partie, soient x et y deux éléments de A. Alors $f(x) \leq f(y)$ si et seulement si $f(x) \cdot f(y) = f(x)$ (en utilisant la loi de composition interne $\cdot$ de (b)), ou encore $f(x \cdot y) = f(x)$, ou encore $f(x \cdot y - x) = 0$ (en utilisant la loi de composition interne $+$ de (b)). Mais

$$x \cdot y - x = x \cdot y + x = x \cdot (1 + y) = x \wedge \neg y,$$

d'où la conclusion de (d). L'assertion (e) est un résultat classique de théorie des anneaux (et même des groupes). □

COROLLAIRE 2.8. *Soient* A *et* B *deux algèbres de Boole, soit* f *un homomorphisme d'algèbres de Boole de* A *vers* B*. Alors* f *induit un isomorphisme de* $A/\operatorname{Ker} f$ *sur* $\operatorname{Im} f$.

PREUVE. Résulte immédiatement de l'assertion correspondante en théorie des anneaux. □

Dans le contexte du Corollaire 2.8 ci-dessus, les possibilités pour $\operatorname{Ker} f$ sont exactement les *idéaux* de A (en tant qu'anneau). La caractérisation de ces idéaux en termes d'algèbres de Boole est la suivante:

LEMME 2.9. *Soit* A *une algèbre de Boole, soit* I *une partie de* A*. Alors* I *est un idéal de* A *si et seulement si il satisfait les propriétés suivantes:*

(i) $0 \in I$;

(ii) $(\forall x, y \in A)\big((y \in I \text{ et } x \leq y) \Rightarrow x \in I\big)$;

(iii) $(\forall x, y \in I)(x \vee y \in I)$.

PREUVE. Une vérification facile. □

LEMME 2.10. *Soit* I *un idéal d'une algèbre de Boole* A*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *I est premier;*
(ii) *$A/I \cong \mathbf{2}$;*
(iii) *I est maximal.*

PREUVE. (i)⇒(ii) Si I est premier, alors A/I est un anneau de Boole *intègre*, non trivial (A n'est pas considéré comme idéal premier de lui-même); puisqu'il satisfait, pour tout x, $x^2 = x$, *i.e.*, $x \cdot (x-1) = 0$, il est réduit à deux éléments, d'où (ii).

(ii)⇒(iii) Puisque A/I est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est un corps, donc I est maximal.

(iii)⇒(i) est classique dans tout anneau commutatif. □

Nous pouvons maintenant définir les filtres et ultrafiltres, comme pour les $\mathfrak{P}(X)$.

DÉFINITION. Soit B une algèbre de Boole. Un *filtre* de B est une partie *non vide* F de B satisfaisant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} (\forall x \in F)(\forall y \in B)(x \leq y \Rightarrow y \in F); \\ (\forall x, y \in F)(x \wedge y \in F). \end{cases}$$

Si de plus $0 \notin F$, nous dirons que F est un *filtre propre*. Si de plus F est maximal pour l'inclusion dans l'ensemble des filtres propres de B, nous dirons que F est un *ultrafiltre*.

Notons qu'il n'existe pas de filtre propre sur l'algèbre de Boole *triviale* $\{0\}$ (qui satisfait "$0 = 1$"). Un petit problème de terminologie se pose ici en raison du fait que *les filtres sur les algèbres de Boole n'ont plus horreur du vide*: si X est un ensemble, les filtres sur X sont exactement les filtres propres de l'algèbre de Boole $\mathfrak{P}(X)$. Ceci est dû essentiellement au Corollaire 2.8 (afin que sa formulation reste naturelle).

Bien qu'il soit pratiquement impossible de "visualiser" un ultrafiltre sur un ensemble infini, il n'en est pas de même pour les ultrafiltres d'algèbres de Boole arbitraires, comme le montre par exemple l'Exercice 2.11.

Le Lemme suivant montre que la notion de filtre (resp., ultrafiltre) est exactement la notion *duale* de la notion d'idéal (resp., idéal maximal):

LEMME 2.11. *Soit B une algèbre de Boole et soit F une partie de B. Soit I la partie "duale" de F,* i.e.*,*

$$I = \{\neg x \mid x \in F\}.$$

Alors F est un filtre (resp., un ultrafiltre) si et seulement si I est un idéal (resp., un idéal maximal).

Suite au Lemme 2.11, si I est l'idéal dual d'un filtre F sur une algèbre de Boole B, nous noterons indistinctement B/I ou B/F l'algèbre de Boole quotient de B par I.

Comme le Lemme suivant le montre, les ultrafiltres des algèbres de Boole se comportent comme les ultrafiltres sur les ensembles:

LEMME 2.12. *Soit B une algèbre de Boole, soit p un ultrafiltre de B. Alors pour tous éléments a et b de B, les propriétés suivantes sont satisfaites:*

$$a \wedge b \in p \iff (a \in p \text{ et } b \in p);$$
$$a \vee b \in p \iff (a \in p \text{ ou } b \in p);$$
$$0 \notin p \text{ et } 1 \in p;$$
$$a \notin p \iff \neg a \in p.$$

PREUVE. Le premier et le troisième point sont valables pour tout filtre propre par définition. Le quatrième point se montre comme le Lemme 1.3. Si $a \in p$ ou $b \in p$, alors $a \vee b \in p$, par définition d'un filtre. Réciproquement, si $a \notin p$ et $b \notin p$, alors (par le quatrième point) $\neg a \in p$ et $\neg b \in p$, donc $\neg a \wedge \neg b \in p$, *i.e.*, $\neg(a \vee b) \in p$, d'où $a \vee b \notin p$ puisque "les filtres propres ont horreur du vide". □

LEMME 2.13 (utilise PIT). *Soit B une algèbre de Boole. Alors tout filtre propre de B est contenu dans un ultrafiltre. Par suite, tout élément non nul de B appartient à au moins un ultrafiltre.*

PREUVE. Nous allons présenter ici une preuve dépendant du Lemme de Zorn. Il est à noter que l'on peut en fait le prouver en utilisant PIT (par exemple en utilisant le Théorème de Krull sous sa forme faible "tout anneau commutatif non trivial admet un idéal premier"—*voir* Exercice 1.17).

Pour montrer le premier énoncé, il suffit, par le Lemme de Zorn, de montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des filtres propres de B, ordonné par inclusion, est inductif. Soit donc $\mathcal{C}$ un ensemble non vide de filtres propres de B qui est totalement ordonné par inclusion. Il est immédiat de vérifier (en utilisant "totalement ordonné") que la réunion $F = \bigcup \mathcal{C}$ des éléments de $\mathcal{C}$ est un filtre de B. De plus, 0 n'appartient à aucun élément de $\mathcal{C}$ (car les éléments de $\mathcal{C}$ sont des filtres propres), donc il n'appartient pas à F, qui est donc un filtre propre de B. Ceci achève la preuve que $\mathcal{E}$ est inductif, d'où le premier énoncé.

Le second énoncé s'obtient immédiatement en appliquant le premier énoncé à $F_a = \{x \in B \mid a \leq x\}$ ($a \in B \setminus \{0\}$ fixé—puisque $a \neq 0$, F_a est un filtre *propre*). □

LEMME 2.14. *Soit F un filtre d'une algèbre de Boole B; soit π l'homomorphisme canonique de B sur B/F. Alors $\bar{\pi} \colon p \mapsto \pi^{-1}[p]$ définit une bijection de l'ensemble des ultrafiltres de B/F sur l'ensemble des ultrafiltres de B contenant F.*

PREUVE. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal dual de p. Alors c'est un résultat classique d'algèbre commutative que $\bar{\pi}$ définit une bijection de l'ensemble des idéaux de B contenant $\mathfrak{m}$ sur l'ensemble des idéaux de $B/\mathfrak{m}$. La conclusion est obtenue en passant au complément, $x \mapsto \neg x$. □

Le Lemme (trivial) suivant servira d'introduction à la suite:

LEMME 2.15. *Soit X un espace topologique. Alors l'ensemble des parties de X qui sont à la fois des ouverts et des fermés de X est une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(X)$.*

Pour tout espace topologique X, notons $\operatorname{Clop} X$ (Clop pour "clopen", ce qui se traduirait plus ou moins par "ourmé"...) l'algèbre de Boole des ouverts fermés de X.

Définition. Un espace topologique X est *éparpillé* quand il admet une base d'ouverts fermés (*i.e.*, tout ouvert de X est réunion d'ouverts fermés). Un espace topologique X est un *espace topologique booléen* quand il est compact et éparpillé.

Dans ce qui va suivre, nous allons établir la *dualité* entre les espaces topologiques booléens et les algèbres de Boole: c'est le *Théorème de représentation de Stone.*

Proposition 2.16 (utilise PIT). *Soit B une algèbre de Boole. Soit $X = \operatorname{Ult} B$ l'ensemble des ultrafiltres de B; pour tout $a \in B$, posons*

$$\varphi(a) = \{p \in X \mid a \in p\}.$$

Alors l'image de φ est la base d'une topologie d'espace booléen sur X, et φ est un isomorphisme de B sur $\operatorname{Clop} X$.

Preuve. Il résulte immédiatement du Lemme 2.6 que φ est un homomorphisme d'algèbres de Boole de B vers $\mathfrak{P}(X)$. Par suite, l'intersection de deux éléments de $\operatorname{Im}\varphi$ est une réunion d'éléments de $\operatorname{Im}\varphi$ (c'est même un élément de $\operatorname{Im}\varphi$), et par suite, $\operatorname{Im}\varphi$ est la base d'une topologie sur X.

Fait 1. $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Clop} X$. *De plus, φ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Boole de B dans* $\operatorname{Clop} X$.

Preuve du Fait. Pour tout $a \in B$, $\complement\varphi(a) = \varphi(\neg a)$ est un ouvert de X, donc $\varphi(a)$ est fermé; il est ouvert, donc ouvert fermé. D'après ce qui précède, φ est un homomorphisme d'algèbres de Boole. Si $a \in B \setminus \{0\}$, alors (Lemme 2.13) il existe $p \in X$ tel que $a \in p$, d'où $p \in \varphi(a)$; donc $\varphi(a) \neq \varnothing$. Par la Proposition 2.7(e), φ est injectif. □ Fait 1.

Fait 2. *X est un espace topologique booléen.*

Preuve du Fait. Soient d'abord p et q deux éléments distincts de X. Il existe donc un élément a de B tel que $a \in p \backslash q$. Par suite, $\varphi(a)$ et $\varphi(\neg a)$ sont des voisinages respectivement de p et de q dont l'intersection est vide. Par suite, X est séparé. Puisque les éléments de $\operatorname{Im}\varphi$ sont ouverts fermés (Fait 1) et que $\operatorname{Im}\varphi$ est une base de la topologie de X, X est éparpillé.

Enfin, pour montrer que X est quasicompact, il suffit de montrer que si un ensemble $\mathbf{C}$ de fermés de X est centré, alors $\mathbf{C}$ est d'intersection non vide. Puisque tout fermé de X est une intersection d'éléments de $\operatorname{Im}\varphi$, il suffit de conclure pour $\mathbf{C} \subseteq \operatorname{Im}\varphi$. Par définition, $\mathbf{C} = \varphi[C]$ où C est une partie de B. Par suite, pour toute partie finie Y de C, l'inégalité $\bigwedge Y \neq 0$ a lieu. Soit F le filtre (propre) de B engendré par C (comme dans la Proposition 1.1). Par le Lemme 2.13, l'algèbre de Boole quotient B/F admet un ultrafiltre, donc, par le Lemme 2.14, il existe un ultrafiltre p de B contenant F. Par suite, pour tout $a \in C$, a appartient à p, d'où $p \in \varphi(a)$: ainsi, $p \in \bigcap \mathbf{C}$, et $\mathbf{C}$ est donc d'intersection non vide. Par suite, X est bien quasicompact. □ Fait 2.

Pour conclure, il suffit donc d'après le Fait 1 de montrer que $\operatorname{Clop} X \subseteq \operatorname{Im}\varphi$. Soit donc U un ouvert fermé de X. Alors, par définition de la topologie de X, il existe une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de B telle que $U = \bigcup_{i\in I} \varphi(a_i)$. Puisque U est fermé, il est compact, donc il existe une partie finie J de I telle que $U = \bigcup_{i\in J} \varphi(a_i)$. Par suite, $U = \varphi\left(\bigvee_{i\in J} a_i\right)$ appartient à $\operatorname{Im}\varphi$. □

Corollaire 2.17 (utilise PIT). *Toute algèbre de Boole est une sous-algèbre d'un certain $\mathfrak{P}(X)$.*

Souvent, le Corollaire 2.17 à lui seul est appelé *"Théorème de représentation de Stone"*, alors qu'en fait, ce dernier est essentiellement l'énoncé plus précis que toute algèbre de Boole est *isomorphe* à l'algèbre de Boole des ouverts fermés d'un certain espace topologique booléen, et que réciproquement tout espace topologique booléen est homéomorphe à l'espace des ultrafiltres d'une certaine algèbre de Boole. En un mot, il exprime la *dualité* entre la catégorie des algèbres de Boole et celle des espaces topologiques booléens. C'est là-dessus que nous allons maintenant nous concentrer.

Pour résumer notre ligne d'attaque, voici donc ce dont nous disposons:

— Pour tout espace topologique booléen X, l'algèbre de Boole $\operatorname{Clop} X$ des ouverts fermés de X (voir Lemme 2.15);

— Pour toute algèbre de Boole B, l'espace topologique booléen $\operatorname{Ult} B$ des ultrafiltres de B (encore appelé "*espace de Stone*" de B).

En termes de catégories, nous allons montrer que Clop et Ult sont des *foncteurs contravariants*, qui réalisent une *dualité* entre la catégorie des algèbres de Boole et celle des espaces topologiques booléens, *i.e.*, sont dans un sens (précisé en 2.19 et 2.20) "inverses" l'un de l'autre. Commençons par le premier énoncé. Sa "traduction" en termes non catégoriques est la suivante:

Proposition 2.18.

(a) *Pour tous espaces topologiques booléens X et Y et toute application continue $f\colon X \to Y$, on peut définir un homomorphisme d'algèbres de Boole* $\operatorname{Clop} f$ *par*

$$\operatorname{Clop} f\colon \operatorname{Clop} Y \to \operatorname{Clop} X, \quad V \mapsto f^{-1}[V].$$

De plus, si X, Y, et Z sont des espaces topologiques booléens et si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont des applications continues, alors

$$\operatorname{Clop} \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\operatorname{Clop} X} \ \textit{et}\ \operatorname{Clop}(g \circ f) = \operatorname{Clop} f \circ \operatorname{Clop} g.$$

(b) *Pour toutes algèbres de Boole A et B et pour tout homomorphisme d'algèbres de Boole $f\colon A \to B$, on peut définir une application continue* $\operatorname{Ult} f$ *par*

$$\operatorname{Ult} f\colon \operatorname{Ult} B \to \operatorname{Ult} A, \quad q \mapsto f^{-1}[q].$$

De plus, si A, B, et C sont des algèbres de Boole et si $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ sont des homomorphismes d'algèbres de Boole, alors

$$\operatorname{Ult} \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{\operatorname{Ult} A}$$

et

$$\operatorname{Ult}(g \circ f) = \operatorname{Ult} f \circ \operatorname{Ult} g.$$

Preuve. Un exercice facile. □

Cependant, ceci ne nous dit absolument pas si oui ou non Clop et Ult sont "inverses" l'un de l'autre dans un sens "naturel". Ceci est l'objet des résultats suivants.

Théorème 2.19 (utilise PIT).

(a) *Soit B une algèbre de Boole. Alors on peut définir un isomorphisme d'algèbres de Boole φ_B de B sur* $\operatorname{Clop}(\operatorname{Ult} B)$ *en posant*

$$\varphi_B(a) = \{p \in \operatorname{Ult} B \mid a \in p\}.$$

(b) *Soit X un espace topologique booléen. Alors on peut définir un homéomorphisme ψ_X de X sur* $\operatorname{Ult}(\operatorname{Clop} X)$ *en posant, pour tout $x \in X$,*

$$\psi_X(x) = \{a \in \operatorname{Clop} X \mid x \in a\}.$$

Preuve. Notons que (a) est en fait exactement le résultat de la Proposition 2.16. Passons donc à (b). Il est facile de vérifier que pour tout $x \in X$, $\psi_X(x)$ est un ultrafiltre de $B = \operatorname{Clop} X$. Par définition de la topologie sur $\operatorname{Ult} B$, une base de la topologie de $\operatorname{Ult} B$ est $\{Y_a \mid a \in B\}$ où l'on pose

$$Y_a = \{p \in \operatorname{Ult} B \mid a \in p\}.$$

Si $a \in B$ est fixé, alors pour tout $x \in X$, $\psi_X(x)$ appartient à Y_a si et seulement si $a \in \psi_X(x)$, *i.e.*, $x \in a$—mais $a \in \operatorname{Clop} B$, donc a est un ouvert [fermé] de X. Ainsi, $\psi_X^{-1}[Y_a]$ est un ouvert de X; ceci est vrai pour tout a, donc ψ_X est une application continue. Soient maintenant x et y deux éléments distincts de X. Puisque X est séparé et éparpillé, il existe un ouvert fermé a de X tel que $x \in a$ et $y \in \complement a$; par suite, $a \in \psi_X(x) \setminus \psi_X(y)$; ainsi, ψ_X est injective. Finalement, soit p un ultrafiltre de B, on montre qu'il est de la forme $\psi_X(x)$. Puisque p est une partie de B, c'est un ensemble de fermés de X; puisque p est un ultrafiltre, p est centré. Puisque X est compact, $\bigcap p \neq \varnothing$. Soit donc x un élément de $\bigcap p$. Pour tout $a \in p$, x appartient à a, *i.e.*, $a \in \psi_X(x)$; par suite, $p \subseteq \psi_X(x)$. Puisque p et $\psi_X(x)$ sont deux ultrafiltres, il en résulte en fait que $p = \psi_X(x)$. Ainsi, ψ_X est surjective. Nous avons donc montré que ψ_X est une bijection continue de X sur $\operatorname{Ult} B$. Puisque X est compact et que $\operatorname{Ult} B$ est séparé, ψ_X est un homéomorphisme. □

(Ce sont en fait la Proposition 2.16 et le Théorème 2.19 qui constituent le "*Théorème de Stone*".) En particulier, dans le contexte du (a) du Théorème 2.19, on obtient que $B \cong \operatorname{Clop}(\operatorname{Ult} B)$ alors que dans le contexte (b), on obtient $X \cong \operatorname{Ult}(\operatorname{Clop} X)$. Cependant, ces derniers énoncés ne contiennent pas le fait que les isomorphismes sont en fait "naturels". Ce dernier fait est exprimé par la proposition suivante:

Proposition 2.20.

(a) *Soient A et B deux algèbres de Boole et soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme. Alors le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "f"'] & \operatorname{Clop}(\operatorname{Ult} A) \arrow[d, "\operatorname{Clop}(\operatorname{Ult} f)"] \\ B \arrow[r, "\varphi_B"] & \operatorname{Clop}(\operatorname{Ult} B) \end{tikzcd}$$

(b) *Soient X et Y deux espaces topologiques booléens et soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Alors le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "f"'] & \operatorname{Ult}(\operatorname{Clop} X) \arrow[d, "\operatorname{Ult}(\operatorname{Clop} f)"] \\ Y \arrow[r, "\psi_Y"] & \operatorname{Ult}(\operatorname{Clop} Y) \end{tikzcd}$$

PREUVE. Une vérification facile. □

On rappelle qu'un diagramme est commutatif lorsque la composée des flèches parcourues en allant d'un point à l'autre du diagramme en suivant les flèches ne dépend que des deux points (pas du chemin parcouru). Ainsi, dans l'énoncé (a) ci-dessus, la commutativité du diagramme indiqué signifie que $\mathrm{Clop}(\mathrm{Ult}\, f) \circ \varphi_A = \varphi_B \circ f$, alors que dans le cas (b), elle signifie que $\mathrm{Ult}(\mathrm{Clop}\, f) \circ \psi_X = \psi_Y \circ f$. Dans le cas de diagrammes plus compliqués, la commutativité peut s'exprimer par un ensemble assez patibulaire d'égalités du style des deux ci-dessus.

Exercices du Chapitre 2

EXERCICE 2.1. Tout inf-demi-treillis *fini* avec un plus grand élément, ou tout sup-demi-treillis *fini* avec un plus petit élément, est un treillis.

EXERCICE 2.2. Donner un exemple d'application d'un sup-demi-treillis vers un autre qui soit un homomorphisme d'ensemble ordonné (*i.e.*, une application croissante) mais pas un homomorphisme de semi-groupes.

EXERCICE 2.3. Donner un exemple d'un sup-demi-treillis $(E, +, \leq)$ et d'une partie S de E qui soit un sup-demi-treillis pour l'ordre induit (par $\leq$) mais pas un sous-sup-demi-treillis de $(E, +, \leq)$.

EXERCICE 2.4. On dit qu'un treillis E est *complet* quand toute partie de E admet une borne supérieure.

(a) Montrer que E est complet si et seulement si toute partie de E admet une borne inférieure.

(b) Trouver un exemple de treillis complet E satisfaisant la loi de distributivité infinie
$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$
(pour tous a, b_i ($i \in I$) dans E) MAIS PAS la loi de distributivité infinie duale dénombrable
$$a \vee \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_n = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (a \vee b_n).$$
(a, b_n ($n \in \mathbb{N}$) dans E). (***Indication:*** adjoindre un plus grand élément à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, puis inverser l'ordre).

EXERCICE 2.5 (Théorème du point fixe de Tarski). Soit E un treillis complet (*voir* l'Exercice 2.4) et soit $f\colon E \to E$ une application *croissante*. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$. ***Indication:*** Soit A l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \leq x$, soit $a = \bigwedge A$. Montrer que $a \in A$, puis $f(a) \in A$).

EXERCICE 2.6. Soit G un groupe. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}(G)$ des sous-groupes de G, muni de l'inclusion, est un treillis borné. Exprimer $\vee$, $\wedge$, 0, 1 dans ce treillis. Montrer qu'en général, ce treillis n'est pas distributif, même si G est fini et commutatif. Montrer que dans ce treillis, un élément peut admettre plus d'un complément.

EXERCICE 2.7. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que $(E, \leq)$ est un treillis distributif. Si E est borné et si a et b sont deux éléments de E, quand a et b sont-il complémentaires? En déduire que si E a au moins deux éléments, alors E n'est pas une algèbre de Boole.

Exercice 2.8. Soit E un treillis distributif et soient a, b, et c trois éléments de E. Alors il existe *au plus* un élément x de E tel que $x \wedge a = b$ et $x \vee a = c$.

Exercice 2.9. Trouver un exemple de treillis borné fini *non distributif* dans lequel tout élément admet au moins un complément. (*Note:* en utilisant une "construction libre", Dilworth a montré que tout treillis—*éventuellement non borné*—peut être plongé dans un treillis dans lequel tout élément admet un *unique* complément. Par suite, il existe des treillis "uniquement complémentés" non distributifs; mais ils sont tous infinis, *voir* l'Exercice 3.6).

Exercice 2.10. Soient A et B deux algèbres de Boole. Alors tout homomorphisme de treillis de A vers B est un homomorphisme d'algèbres de Boole.

Exercice 2.11.

(a) Soit X un ensemble infini. Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des parties Y de X telles que soit Y soit $X \setminus Y$ est un ensemble fini est une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(X)$. Montrer que
$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ est fini}\}$$
est un ultrafiltre de $\mathcal{B}$.

(b) Plus généralement, montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur un ensemble X, alors
$$\mathcal{B} = \{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid Y \in \mathcal{F} \text{ ou } X \setminus Y \in \mathcal{F}\}$$
est une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(X)$, et $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre de $\mathcal{B}$.

Exercice 2.12. Soit E un treillis distributif. Soit I un ensemble *fini*, et soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles *finis*. Montrer que l'identité suivante
$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee X_i = \bigvee_{f \in \prod_{i\in I} X_i} \bigwedge f[I]$$
est satisfaite. (On pourra raisonner par récurrence sur $|I|$.)

En déduire en particulier que si a_i, b_i $(i \in I)$ sont des éléments de E, alors
$$\bigwedge_{i\in I} (a_i \vee b_i) = \bigvee_{J \subseteq I} \left(\bigwedge_{i\in J} a_i \wedge \bigwedge_{i \in I\setminus J} b_i \right).$$

Exercice 2.13. * Cet exercice se propose de caractériser, pour tout ensemble X, "l'algèbre de Boole libre" sur X—en particulier, de la représenter comme une certaine sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$. (Pour une autre démonstration plus "syntaxique" [mais essentiellement équivalente], utilisant la forme normale disjonctive, *voir* par exemple [**Birk2**] au chapitre "free Boolean algebras").

(a) Rappelons que pour tout entier naturel n, n est identifié à $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Pour toute algèbre de Boole B et tout $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une suite finie $(a_i)_{i<n}$ est une *quasi-partition* de l'unité de B (*i.e.*, 1_B) quand
$$(\forall i, j < n)(i \neq j \Rightarrow a_i \wedge a_j = 0); \qquad \bigvee_{i<n} a_i = 1$$
(on ne suppose pas les a_i non nuls). Montrer que si $(a_i)_{i<n}$ est une quasi-partition de l'unité de B, alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres de Boole f de $\mathfrak{P}(n)$ vers B tel que $(\forall i < n)(f(\{i\}) = a_i)$.

(b) Soit B une algèbre de Boole et soit $(a_i)_{i<n}$ une suite finie d'éléments de B. Posons $B_n = \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(n))$. Pour tout $Y \in \mathfrak{P}(n)$, posons

$$b_Y = \bigwedge_{i \in Y} a_i \wedge \bigwedge_{i \in n \setminus Y} \neg a_i.$$

Montrer que $(b_Y)_{Y \in \mathfrak{P}(n)}$ est une quasi-partition de l'unité de B (pour prouver que le sup des b_Y est 1, on pourra appliquer la dernière partie de l'Exercice 2.12 en remarquant que $\bigwedge_{Y \in \mathfrak{P}(n)} (a_i \vee \neg a_i) = 1$).

(c) Dans le contexte de (b), poser, pour tout $i < n$,

$$\epsilon_n(i) = \{Y \in \mathfrak{P}(n) \mid i \in Y\}.$$

Montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'algèbres de Boole $g\colon B_n \to B$ tel que $(\forall i < n)(g(\epsilon_n(i)) = a_i)$. (Ce résultat signifie que si $\epsilon_n\colon i \mapsto \epsilon_n(i)$, alors B_n, munie de ϵ_n, est l'algèbre de Boole libre à n générateurs).

(d) * Soit X un ensemble quelconque. Pour tout $x \in X$, on pose

$$\epsilon_X(x) = \{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid x \in Y\}.$$

Pour toute partie finie Z de X, soit e_Z l'application de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(Z))$ vers $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ définie par

$$e_Z(\boldsymbol{X}) = \{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid Y \cap Z \in \boldsymbol{X}\},$$

et posons $B_X = \bigcup_{Z \subseteq X \text{ fini}} \operatorname{Im} e_Z$. Montrer que B_X est une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ contenant l'image de ϵ_X. Montrer, en utilisant le résultat de la question précédente, que B_X, muni de l'application $\epsilon_X\colon X \to B_X$, est l'algèbre de Boole libre sur X; cela signifie que *pour toute application f de X vers une algèbre de Boole B, il existe un seul homomorphisme d'algèbres de Boole g de B_X vers B tel que $g \circ \epsilon_X = f$.*

(e) En déduire que *toute algèbre de Boole est un quotient (*i.e.*, l'image par un homomorphisme surjectif) d'une algèbre de Boole B_X pour un X bien choisi.* (Choisir pour X l'ensemble sous-jacent de l'algèbre de Boole de départ).

Exercice 2.14. Déduire de la formulation originelle de PIT (au Chapitre 1) et de l'Exercice 2.13(e) une nouvelle preuve du fait que PIT entraîne que *toute algèbre de Boole non triviale admet un ultrafiltre.* (***Indication:*** si $\phi\colon B_X \to B$ est un homomorphisme surjectif, considérer le filtre sur $\mathbf{X} = \mathfrak{P}(X)$ engendré par $\phi^{-1}[\{1\}]$). Puis, en considérant

$$B_a = \{x \in B \mid x \leq a\},$$

retrouver la formulation du Lemme 2.13.

En déduire que *le Théorème de Tychonoff* PIT *est équivalent à "toute algèbre de Boole non triviale admet un ultrafiltre".*

Exercice 2.15. Définir une mesure de probabilité finiment additive sur une algèbre de Boole comme dans le Chapitre 1 pour les $\mathfrak{P}(X)$. Puis, en imitant la preuve de l'Exercice 2.14, montrer que HB *est équivalent à "toute algèbre de Boole non triviale admet une mesure de probabilité finiment additive".*

Exercice 2.16. Soit n un entier naturel. Montrer (sans utiliser l'Exercice 2.13!) que toute algèbre de Boole à n générateurs est finie, de cardinal au plus 2^{2^n}.

Exercice 2.17. Soit B une algèbre de Boole non triviale. Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des sous-algèbres de Boole non triviales *finies* de B.

(a) Montrer que B est *filtrant croissant* pour l'inclusion, *i.e.*, pour tous X et Y dans $\mathbf{P}$, il existe $Z \in \mathbf{P}$ tel que $X \subseteq Z$ et $Y \subseteq Z$.

(b) * Pour tout $X \in \mathbf{P}$, posons

$$\mathbf{P}_X = \{Y \in \mathbf{P} \mid X \subseteq Y\}.$$

En considérant le filtre sur $\mathbf{P}$ engendré par les $\mathbf{P}_X$, montrer que

(b1) PIT entraîne que B admet un ultrafiltre, et

(b2) HB entraîne que B admet une mesure de probabilité finiment additive.

En déduire les résultats des Exercices 2.14 et 2.15.

Exercice 2.18. * On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ a la *propriété d'interpolation dénombrable* quand pour toutes parties [au plus] dénombrables non vides X et Y de E telles que

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leq y)$$

—nous écrirons $X \leq Y$, il existe un élément z de E tel que $X \leq z \leq Y$.

(a) Soient A et B deux treillis, soit $\phi\colon A \to B$ un homomorphisme surjectif de treillis. On suppose que A a la propriété d'interpolation dénombrable. Montrer que B a la propriété d'interpolation dénombrable. (***Indication:*** Si $\phi(a_m) \leq \phi(b_n)$ pour tous m, n dans $\mathbb{N}$, construire par récurrence x_m, y_n dans A tels que $\phi(x_m) = \phi(a_m)$, $\phi(y_n) = \phi(b_n)$ et, pour tous m, n, $x_m \leq y_n$).

(b) Soit B l'algèbre de Boole des parties de $\mathbb{N}$ qui sont soit finies, soit de complémentaire fini. Montrer que B n'a pas la propriété d'interpolation dénombrable. *En déduire que B n'est le quotient d'aucun* $\mathfrak{P}(X)$. Comparer avec le résultat de l'Exercice 2.13(e).

Exercice 2.19. Montrer que le Théorème de représentation de Stone (sous la forme "toute algèbre de Boole se plonge dans un certain $\mathfrak{P}(X)$) implique PIT—et donc est *équivalent* à PIT. (***Indication:*** on admettra le résultat de l'Exercice 2.14. Montrer que si B est une sous-algèbre de Boole non triviale de $\mathfrak{P}(X)$ et si x est un élément de X, considérer $\{U \in B \mid x \in U\}$).

Exercice 2.20. Soit B une algèbre de Boole. Pour tout élément a de B et pour toute partie X de B, on note

$$a \wedge X = \{a \wedge x \mid x \in X\} \text{ et } a \vee X = \{a \vee x \mid x \in X\}.$$

Montrer que si $\bigvee X$ existe, alors $\bigvee(a \wedge X)$ existe et est égal à $a \wedge \bigvee X$. Montrer de même que si $\bigwedge X$ existe, alors $\bigwedge(a \vee X)$ existe et est égal à $a \vee \bigwedge X$. (***Note:*** il est nécessaire, à cause de l'Exercice 2.4, d'utiliser la *complémentation* $x \mapsto \neg x$). En déduire que si B est complète, alors B satisfait la loi de distributivité infinie et son dual (*voir* l'Exercice 2.4(b)).

Exercice 2.21. Soit E un treillis distributif. On définit comme pour les algèbres de Boole un *idéal* (resp., *filtre*) de E comme étant un segment initial (resp., final, *voir* l'Exercice 1.2) non vide de E, stable par $\vee$ (resp., $\wedge$). Un idéal I est *premier* quand pour tous x, y dans E, $x \wedge y \in I$ implique que $x \in I$ ou $y \in I$, et dualement pour les filtres.

(a) Montrer que pour tout filtre F, tout idéal I de E qui est maximal parmi les idéaux disjoints de F est premier.

(b) En déduire que pour tous éléments a et b de E tels que $a \not\leq b$, il existe un filtre premier p de E tel que $a \in p$ et $b \notin p$.
(c) En déduire que *tout treillis distributif se plonge dans une algèbre de Boole de la forme* $\mathfrak{P}(X)$. (c'est le "Théorème de Birkhoff-Stone"—1933 pour le premier auteur, 1936 pour le second).

Exercice 2.22. Un treillis E est dit être une *algèbre de Heyting* quand pour tous éléments a et b de E, il existe un *plus grand* élément c de E tel que $a \wedge c \leq b$. On note $c = a \to b$. Ainsi, $\to$ est défini par

$$(\forall a, b, x)(a \wedge x \leq b \Leftrightarrow x \leq a \to b).$$

(a) Montrer que toute algèbre de Boole est une algèbre de Heyting. Comment s'exprime $a \to b$ avec les opérations d'algèbre de Boole?
(b) Montrer que [l'ensemble d'ouverts de] tout espace topologique est une algèbre de Heyting complète.
(c) Soit E un ensemble totalement ordonné admettant un plus grand élément 1. Montrer que E est une algèbre de Heyting. Quelle est la valeur de $a \to b$?
(d) Montrer que toute algèbre de Heyting est un treillis distributif (***Indication:*** soit $d = a \to [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$. Montrer que $b \leq d$ et $c \leq d$).
(e) Montrer que tout treillis distributif fini est une algèbre de Heyting.
(f) Montrer qu'un treillis complet est une algèbre de Heyting si et seulement si il satisfait la loi de distributivité infinie (*voir* l'Exercice 2.4).
(g) Trouver un exemple de treillis distributif complet (définition dans l'Exercice 2.4) qui n'est pas une algèbre de Heyting.
(h) Trouver un exemple de deux algèbres de Heyting A et B telles que A soit un sous-treillis de B mais pas une sous-algèbre de Heyting de B.

Exercice 2.23. Soit E un treillis avec 1 muni d'une loi de composition interne $\to$. Montrer que $\to$ donne à E une structure d'algèbre de Heyting si et seulement si les équations suivantes:

$$\text{(i) } a \to a = 1; \qquad \text{(ii)} \qquad a \wedge (a \to b) = a \wedge b;$$
$$\text{(iii) } b \wedge (a \to b) = b;$$
$$\text{(iv) } a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$$

ont lieu pour tous éléments a, b, et c de E.

Exercice 2.24. Soit E un treillis distributif. Notons $\operatorname{Idl} E$ l'ensemble des *idéaux* de E, *i.e.*, des sous-ensembles I de E tels que pour tous x, y dans E,

$$(x \leq y \text{ et } y \in I) \Rightarrow x \in I; \quad (x \in I \text{ et } y \in I) \Rightarrow x \vee y \in I.$$

Montrer que $\operatorname{Idl} E$ est une algèbre de Heyting complète (*voir* les Exercices 2.22 et 2.23). En déduire que *tout treillis distributif se plonge dans une algèbre de Heyting complète.*

Exercice 2.25. Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer que l'ensemble des éléments *idempotents* de A (*i.e.*, les éléments x de A tels que $x^2 = x$) est une algèbre de Boole, muni des lois de composition (internes? le prouver!) $x \wedge y = x \cdot y$ et $x \vee y = x + y - x \cdot y$. Expliciter la *négation* dans cette algèbre de Boole.

Exercice 2.26. Montrer la réciproque suivante de l'Exercice 2.25: pour toute algèbre de Boole B, il existe un anneau commutatif unitaire A dont l'algèbre de Boole des idempotents est isomorphe à B, et tel que A est "de caractéristique 0", *c.à.d.* que $mx = 0$ implique que $x = 0$, pour tout entier non nul m et tout élément x de A. (***Indication:*** on pourra considérer un espace de fonctions continues sur l'espace de Stone de B).

Exercice 2.27. * Soit A une sous-algèbre de Boole d'une algèbre de Boole B et soit $b \in B \setminus A$. Montrer qu'il existe deux ultrafiltres p et q de B tels que $b \in p$, $b \notin q$ et $p \cap A = q \cap A$. (***Indication:*** passer aux espaces de Stone de A et de B, et raisonner en termes topologiques).

Exercice 2.28. Soit B une algèbre de Boole *infinie*. Montrer que B a au moins $|B|$ ultrafiltres. (***Indication:*** Soit $\kappa = |B|$ et supposons que $S = \operatorname{Ult} B$ soit de cardinal $< \kappa$. Pour tout $(p, q) \in S \times S$ tel que $p \neq q$, soit $b_{pq} \in p \setminus q$; considérer la sous-algèbre de Boole A de B engendrée par l'ensemble de ces b_{pq}. Puisque $|A| < |B|$, il existe un élément b dans $B \setminus A$. Appliquer l'Exercice 2.27).

Exercice 2.29. Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Notons $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E, muni de la relation d'inclusion.

(a) Montrer que $(\mathcal{S}(E), \subseteq)$ est un treillis *complet* (*voir* l'Exercice 2.4), dans lequel pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{S}(E)$,

$$\bigwedge_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} X_i;$$
$$\bigvee_{i \in I} X_i = \sum_{i \in I} X_i$$
$$= \left\{ x \in E \mid (\exists J \subseteq I \text{ fini})(\exists_{j \in J} x_j \in X_j) \left(x = \sum_{j \in J} x_j \right) \right\}.$$

En particulier, pour tous sous-espaces X et Y de E,

$$X \vee Y = X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

(b) Montrer que si E est de dimension finie sur K, alors $(\mathcal{S}(E), +, \cap, \varnothing, E)$ est isomorphe à son dual $(\mathcal{S}(E), \cap, +, E, \varnothing)$. (***Indication:*** considérer l'orthogonalité pour la forme bilinéaire symétrique $\sum_{i<n} x_i y_i$ où n est la dimension).

(c) * Montrer que si E est de dimension infinie, alors il existe des sous-espaces vectoriels A, B_n $(n \in \mathbb{N})$ de E tels que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et

$$A + \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A + B_n).$$

En déduire que le treillis $\mathcal{S}(E)$ n'est pas isomorphe à son dual. Comparer avec le résultat de l'Exercice 1.7.

Exercice 2.30. * Pour tout ensemble ordonné $(E, \leq)$, la *topologie de l'intervalle* sur E est, par définition, la plus petite topologie sur E pour laquelle tous les intervalles de la forme

$$[a, \rightarrow] = \{x \in E \mid a \leq x\}$$

et

$$[\leftarrow, a] = \{x \in E \mid x \leq a\}$$

sont des *fermés*.

(a) Montrer que pour tous a et b dans E, l'intervalle $[a, b] = \{x \in E \mid a \leq x \leq b\}$ est un fermé de E pour la topologie de l'intervalle.

(b) Montrer sur un exemple que la plus petite topologie sur E pour laquelle tous les intervalles $[a, b]$ sont des fermés n'est pas nécessairement la topologie de l'intervalle.

(c) Supposons que E soit un *treillis* et que, muni de la topologie de l'intervalle, il soit *quasicompact*. Montrer que E est un treillis *complet*. (***Indication:*** si S est une partie non vide majorée de E, considérer l'ensemble des intervalles $[s, t]$ où t est un majorant de S. Si S est vide ou non majorée, adapter l'argument précédent).

(d) Réciproquement, supposons que E soit un treillis complet. Montrer que E, muni de la topologie de l'intervalle, est quasicompact. (***Indication:*** on pourra utiliser le Théorème de la sous-base d'Alexander, *voir* Exercice 1.9).

Ainsi, on a montré le résultat suivant, dû à O. Frink (*voir* [**Frin1**]): *Un treillis est complet si et seulement si, muni de la topologie de l'intervalle, il est quasicompact.* (***Note:*** il n'est pas nécessairement séparé, même dans le cas d'une algèbre de Boole!).

Exercice 2.31. Établir une équivalence entre les idéaux des algèbres de Boole et les anneaux non nécessairement unitaires satisfaisant $(\forall x)(x^2 = x)$ (on pourra s'inspirer de la preuve pour l'équivalence entre algèbres de Boole et anneaux de Boole).

Exercice 2.32. ** Cet exercice suppose connues les notions de base de la théorie des modèles (termes, formules atomiques, formules, satisfaction...), et se propose de montrer l'équivalence entre PIT et le Théorème de compacité du calcul des prédicats. Ce dernier s'énonce habituellement comme suit:

> "Si $\mathcal{T}$ est une théorie du premier ordre [écrite dans un langage—on dit parfois signature—donné] finiment satisfaisable [*i.e.*, dont toute partie finie admet un modèle], alors $\mathcal{T}$ est satisfaisable."

(L'équivalence entre "satisfaisable" et "cohérente" est la combinaison du Théorème de compacité et du Théorème de complétude).

(a) En admettant le Théorème de compacité du calcul des prédicats, montrer PIT sous la forme de l'axiome de l'ultrafiltre. (***Indication:*** Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur un ensemble non vide I. Soit $\mathcal{L}$ le langage du premier ordre admettant pour symboles de constante c_x ($x \in I$) et un symbole de prédicat (*i.e.*, relation unaire) $\mathbf{U}$. Soit $\mathcal{T}$ la théorie écrite dans $\mathcal{L}$ dont les axiomes sont $\mathbf{U}(c_x)$ (tout $x \in \mathcal{F}$); $(\mathbf{U}(c_x)$ et $\mathbf{U}(c_y)) \Rightarrow \mathbf{U}(c_{x \cap y})$ (tous x et y dans $\mathfrak{P}(I)$); non $\mathbf{U}(c_x) \Leftrightarrow \mathbf{U}(c_{\complement x})$ (tout x dans $\mathfrak{P}(I)$); $\mathbf{U}(c_x) \Rightarrow \mathbf{U}(c_y)$ (tous $x \subseteq y$ dans $\mathfrak{P}(I)$). Montrer que $\mathcal{T}$ est finiment cohérente. Si M est un modèle de $\mathcal{T}$, considérer $\mathcal{U} = \{x \in \mathfrak{P}(I) \mid M \models \mathbf{U}(c_x)\}$).

Désormais, admettons PIT, sous la forme équivalente "toute algèbre de Boole admet un ultrafiltre" (*voir* Lemme 2.13, ou par exemple l'Exercice 2.17). Nous allons montrer le Théorème de compacité du calcul des prédicats. Donnons-nous donc une théorie $\mathcal{T}$ dans un langage $\mathcal{L}$. On suppose que $\mathcal{T}$ est finiment

satisfaisable. Rappelons qu'une formule est *close* quand elle n'a pas de variable libre.

(b) Soit $(c_\varphi)_{\varphi \text{ formule à une variable libre de } \mathcal{L}}$ une famille de nouveaux symboles de constante, soit $\mathcal{L}'$ le nouveau langage obtenu en incorporant à $\mathcal{L}$ ces nouveaux symboles et soit $\mathcal{T}'$ la théorie écrite dans $\mathcal{L}'$ dont les axiomes sont ceux de $\mathcal{T}$ ainsi que toutes les formules de la forme $(\exists \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi(c_\varphi)$ pour toute formule φ à une variable libre $\mathbf{x}$ de $\mathcal{L}$.

Montrer que $\mathcal{T}'$ est finiment satisfaisable, et que si $\mathcal{T}'$ est satisfaisable, alors $\mathcal{T}$ l'est aussi.

(c) En déduire, par itération du procédé précédent, qu'il existe une extension $\mathcal{L}^*$ de $\mathcal{L}$ par des symboles de constante, une famille $(c_\varphi)_{\varphi \text{ formule à une variable libre de } \mathcal{L}^*}$ de symboles de constante de $\mathcal{L}^*$ et une théorie $\mathcal{T}^*$ écrite dans $\mathcal{L}^*$ contenant $\mathcal{T}$ possédant les propriétés suivantes:

(i) $\mathcal{T}^*$ est finiment satisfaisable;

(ii) Pour toute formule $\varphi(\mathbf{x})$ à une variable libre $\mathbf{x}$ de $\mathcal{L}^*$, la formule $(\exists \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi(c_\varphi)$ appartient à $\mathcal{T}^*$;

(iii) Si $\mathcal{T}^*$ est satisfaisable, alors $\mathcal{T}$ l'est aussi.

Ainsi, le point (c) permet de supposer, *sans perte de généralité*, que pour toute formule φ à une variable libre de $\mathcal{L}$, $(\exists \mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi(c_\varphi)$ appartient à $\mathcal{T}$ ("hypothèse des témoins"). *Nous supposerons désormais que $\mathcal{T}$ satisfait cette condition.*

Pour toute formule close φ de $\mathcal{L}$, on écrit $\mathcal{T} \models^* \varphi$ quand il existe une sous-théorie finie $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ telle que tout modèle de $\mathcal{T}'$ satisfait φ.

(d) Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble de toutes les formules closes de $\mathcal{L}$. On définit une relation binaire $\equiv$ sur $\mathbb{F}$ en posant

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \mathcal{T} \models^* (\varphi \Leftrightarrow \psi).$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{F}$, et que $\mathbb{F}/\equiv$ peut être naturellement muni d'une structure d'algèbre de Boole, telle que si, pour tout $\varphi \in \mathbb{F}$, on note $[\varphi]$ la classe d'équivalence de φ modulo $\equiv$, alors pour tous φ et ψ dans $\mathbb{F}$, $[\varphi \text{ et } \psi] = [\varphi] \wedge [\psi]$, $[\varphi \text{ ou } \psi] = [\varphi] \vee [\psi]$ et $[\text{non}\, \varphi] = \neg[\varphi]$.

(e) Notons $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole précédente. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $\mathcal{B}$ (donné par PIT), et soit $\overline{\mathcal{T}}$ l'ensemble des formules φ de $\mathbb{F}$ telles que $[\varphi] \in \mathcal{U}$. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est finiment satisfaisable, qu'elle contient $\mathcal{T}$, que pour toute formule $\varphi \in \mathbb{F}$, $\overline{\mathcal{T}} \models^* \varphi$ équivaut à $\varphi \in \overline{\mathcal{T}}$, et que pour toute formule φ de $\mathbb{F}$, $\overline{\mathcal{T}}$ contient comme élément soit φ, soit non φ.

(f) Soit $\mathbf{C}$ l'ensemble des symboles de constante de $\mathcal{L}$. On définit une relation binaire $\sim$ sur $\mathbf{C}$ en posant $a \sim b \Leftrightarrow (a = b) \in \overline{\mathcal{T}}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{C}$, et que l'on peut structurer le quotient $M = \mathbf{C}/\sim$ en un modèle de $\mathcal{L}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tous c, $c_1, \ldots, c_n$ dans $\mathbf{C}$, tout symbole de relation à n places R et tout symbole de fonction à n places f,

$$\begin{cases} c^M = [c]_\sim = \text{classe d'équivalence de } c \text{ modulo } \sim, \\ M \models R([c_1]_\sim, \ldots, [c_n]_\sim) \Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in \overline{\mathcal{T}}, \\ M \models [c]_\sim = f([c_1]_\sim, \ldots, [c_n]_\sim) \Leftrightarrow f(c_1, \ldots, c_n) \in \overline{\mathcal{T}}. \end{cases}$$

(g) Montrer (par induction sur la complexité) que pour toute formule close $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathcal{L}$ [les c_i sont *tous* les symboles de constante de $\mathcal{L}$ apparaissant dans φ],

$$M \models \varphi([c_1]_\sim, \ldots, [c_n]_\sim) \Leftrightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in \overline{\mathcal{T}}.$$

En déduire que M est un modèle de $\mathcal{T}$. Conclure.

CHAPITRE 3

Transition; treillis pseudo-complémentés

Ce court chapitre va étudier une certaine classe de treillis, les treillis *pseudo-complémentés*. Sa principale utilité sera de construire par la suite de nouvelles algèbres de Boole. La plupart des résultats de ce chapitre sont dûs à V. Glivenko.

DÉFINITION. Soit E un treillis avec 0, soit a un élément de E. Un *pseudo-complément* de a est un élément b de E tel que E satisfait la condition:

$$(\forall x)(a \wedge x = 0 \Longleftrightarrow x \leq b).$$

Le treillis E est *pseudo-complémenté* quand tout élément de E admet un pseudo-complément.

Noter que, par définition, un pseudo-complément de a est *unique*, mais que la relation "x est un pseudo-complément de y" n'est pas nécessairement symétrique. Nous noterons $a^\perp$ le pseudo-complément de a quand il existe. Notons également que la définition ci-dessus peut se faire dans un contexte plus général, celui d'"inf-demi-treillis avec 0".

EXEMPLE 3.1. Toute algèbre de Boole est un treillis pseudo-complémenté (avec $a^\perp = \neg a$ pour tout a).

EXEMPLE 3.2. Le treillis des ouverts d'un espace topologique quelconque est pseudo-complémenté: si U est un ouvert d'un espace topologique X, alors $U^\perp$ est égal à l'intérieur du complémentaire de U. *Voir* le Chapitre 4 pour plus de détails.

EXEMPLE 3.3. Soit E un ensemble *totalement ordonné* avec 0 et 1. Alors E est un treillis pseudo-complémenté, avec $a^\perp = 0$ si $a \neq 0$ et $0^\perp = 1$.

Voici enfin un exemple éventuellement non distributif, inspiré du précédent:

EXEMPLE 3.4. Soit A un treillis borné quelconque. Soit ε un objet non dans A, et posons $A^\varepsilon = A \cup \{\varepsilon\}$, sur lequel on prolonge l'ordre de A en posant $0 < \varepsilon$ et $\varepsilon < x$ pour tout $x \in A \setminus \{0\}$. Alors A^ε est un treillis borné, dans lequel tout élément est comparable à ε (*i.e.*, pour tout x, $x \leq \varepsilon$ ou $\varepsilon \leq x$) et pour tous a et b incomparables,

$$\begin{cases} a \vee b = a \vee^A b \\ a \wedge b = \begin{cases} a \wedge^A b, & \text{si } a \wedge^A b \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{si } a \wedge^A b = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Alors pour tout a dans A^ε, l'égalité $a^\perp = 0$ est satisfaite si $a \neq 0$, alors que $0^\perp = 1$.

Notons que *l'on n'a pas toujours* $a^{\perp\perp} = a$.

LEMME 3.5. *Soit E un treillis avec 0, soient a et b deux éléments de E admettant chacun un pseudo-complément. Alors*

(a) $a \leq b \Longrightarrow b^\perp \leq a^\perp$.
(b) *Si E est distributif, alors $a \vee b$ admet $a^\perp \wedge b^\perp$ pour pseudo-complément.*
(c) *Si E est pseudo-complémenté, alors*

$$(a \vee b)^\perp = a^\perp \wedge b^\perp.$$

Preuve. (a) Puisque $b^\perp \wedge a \leq b^\perp \wedge b = 0$, il vient, par définition de $a^\perp$, que $b^\perp \leq a^\perp$.

(b) Si E est distributif, alors pour tout $x \in E$, l'égalité $x \wedge (a \vee b) = 0$ est satisfaite si et seulement si $x \wedge a = x \wedge b = 0$ (en utilisant la distributivité), si et seulement si $x \leq a^\perp$ et $x \leq b^\perp$, si et seulement si $x \leq a^\perp \wedge b^\perp$; d'où la conclusion pour (b).

(c) Si E est pseudo-complémenté, alors, pour tout $x \in E$, nous obtenons les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} x \leq (a \vee b)^\perp &\text{si et seulement si } x \wedge (a \vee b) = 0, \\ &\text{si et seulement si } a \vee b \leq x^\perp, \\ &\text{si et seulement si } a \leq x^\perp \text{ et } b \leq x^\perp, \\ &\text{si et seulement si } a \wedge x = b \wedge x = 0, \\ &\text{si et seulement si } x \leq a^\perp \wedge b^\perp. \end{aligned}$$

□

Notation. Dans tout treillis pseudo-complémenté E, nous noterons $x^* = x^{\perp\perp} = (x^\perp)^\perp$.

Lemme 3.6. *Pour tous éléments a, b dans un treillis pseudo-complémenté E,*

(a) $a \leq a^*$.
(b) $a \leq b \Longrightarrow a^* \leq b^*$.
(c) $a^{\perp\perp\perp} = a^\perp$.
(d) $a^{**} = a^*$.

Preuve. (a) Puisque $a \wedge a^\perp = 0$, les relations $a \leq (a^\perp)^\perp = a^*$ sont satisfaites.

(b) Trivial par le Lemme 3.5(a).

(c) Puisque $a \leq a^{\perp\perp}$ et par le Lemme 3.5(a), $a^{\perp\perp\perp} \leq a^\perp$. Réciproquement, $a^{\perp\perp\perp} = (a^\perp)^{\perp\perp} \leq a^\perp$ (on utilise (a)), d'où l'égalité.

(d) En utilisant (c), on obtient $a^{**} = a^{\perp\perp\perp\perp} = a^{\perp\perp} = a^*$. □

Définition. Soit E un treillis pseudo-complémenté. Un élément x de E est *fermé*, quand $x = x^*$.

Par le Lemme 3.6(c), un élément x de E est fermé si et seulement si x est de la forme $y^\perp$, où $y \in E$.

Lemme 3.7. *Soit E un treillis complémenté tel que pour tout $a \in E$, tout complément de a est aussi un pseudo-complément de a. Alors E est une algèbre de Boole.*

Preuve. Par unicité du pseudo-complément, tout élément a de E admet $a^\perp$ pour unique complément. Puisque la relation de complémentarité est symétrique, l'application $x \mapsto x^\perp$ est involutive (*i.e.*, $x^{\perp\perp} = x$ pour tout $x \in E$). Elle est *décroissante* par le Lemme 3.5(a), et elle est donc un isomorphisme de $(E, \leq)$ sur $(E, \geq)$.

Montrons alors que E est distributif. Soient donc a, b, et c dans E. Il est toujours vrai que $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leq a\wedge(b\vee c)$. Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que $\big((a\wedge b)\vee(a\wedge c)\big)^\perp\leq\big(a\wedge(b\vee c)\big)^\perp$ et d'appliquer la remarque précédente. Soit donc x le membre de gauche. Par définition, $x\wedge\big((a\wedge b)\vee(a\wedge c)\big)=0$, d'où *a fortiori* $x\wedge(a\wedge b)=x\wedge(a\wedge c)=0$. Par suite, b et c sont tous deux inférieurs ou égaux à $(x\wedge a)^\perp$, d'où $b\vee c\leq(x\wedge a)^\perp$, d'où $x\wedge a\wedge(b\vee c)=0$, d'où $x\leq\big(a\wedge(b\vee c)\big)^\perp$. Ainsi, E est un treillis distributif complémenté, donc une algèbre de Boole. □

Voir l'Exercice 3.5 pour montrer à quel point les hypothèses du Lemme ci-dessus sont importantes.

NOTATION. Dans tout treillis pseudo-complémenté, on pose, pour tous éléments a et b,

$$a\nabla b=(a\vee b)^*.$$

THÉORÈME 3.8. *Soit E un treillis pseudo-complémenté borné et soit B l'ensemble des éléments fermés de E. Alors $(B,\nabla,\wedge,0,1)$ est une algèbre de Boole, dans laquelle l'opération de complémentation est $x\mapsto x^\perp$.*

PREUVE. Par le Lemme 3.5(c), B est stable par $\wedge$. Par définition de ∇ et le Lemme 3.6(d), B est stable par ∇. Soient a et b dans B, on vérifie que $a\wedge b$ (resp., $a\nabla b$) est la borne inférieure (resp., supérieure) de $\{a,b\}$ dans B. Il est trivial que $a\wedge b\leq a,b\leq a\nabla b$. Soit maintenant c dans B. Si $c\leq a,b$, alors $c\leq a\wedge b$ et ainsi, $a\wedge b$ est la borne inférieure de $\{a,b\}$ dans B. Si a, $b\leq c$, alors $a\vee b\leq c$, d'où $a\nabla b=(a\vee b)^*\leq c^*=c$: ainsi, $a\nabla b$ est la borne supérieure de $\{a,b\}$ dans B.

De plus, pour tout $a\in B$, $a^\perp$ est le pseudo-complément de a dans E et appartient à B, donc $a^\perp$ est aussi le pseudo-complément de a dans B. De plus, $a\wedge a^\perp=0$ par définition, mais aussi $a\nabla a^\perp=(a\vee a^\perp)^{\perp\perp}=(a^\perp\wedge a^{\perp\perp})^\perp=0^\perp=1$: ainsi, $a^\perp$ est un complément de a dans B (compris comme $(B,\nabla,\wedge,0,1)$). Afin d'appliquer le Lemme 3.7 à B, on montre alors que si b est un complément de a dans B, alors $b=a^\perp$. Tout d'abord, $a\wedge b=0$ donc $b\leq a^\perp$. De plus, $1=a\nabla b$, d'où $0=1^\perp=(a\nabla b)^\perp=(a\vee b)^{\perp\perp\perp}=(a\vee b)^\perp=a^\perp\wedge b^\perp$, d'où $a^\perp\leq b^{\perp\perp}=b$. Finalement, $a^\perp=b$, et on a donc montré que l'unique complément de a dans B est $a^\perp$. Le Lemme 3.7 entraîne alors que B est une algèbre de Boole. □

PROPOSITION 3.9. *Soit E un treillis pseudo-complémenté borné.*

(a) *L'application $x\mapsto x^\perp$ est un homomorphisme surjectif de treillis de $(E,\vee,\wedge,0,1)$ sur $(B,\wedge,\nabla,1,0)$.*
(b) *L'application $x\mapsto x^*$ est un homomorphisme surjectif de treillis de $(E,\vee,\wedge,0,1)$ sur $(B,\nabla,\wedge,0,1)$.*

PREUVE. (a) Il est immédiat que $0^\perp=1$ et $1^\perp=0$. Il résulte du Lemme 3.5(c) que $(a\vee b)^\perp=a^\perp\wedge b^\perp$ pour tous a, b dans E. Enfin, pour tous a, b, et x dans E, $x\leq a^\perp\nabla b^\perp$ si et seulement si $x\leq(a^\perp\vee b^\perp)^{\perp\perp}$, si et seulement si $x\wedge(a^\perp\vee b^\perp)^\perp=0$, si et seulement si (par le Lemme 3.5(c)) $x\wedge(a^{\perp\perp}\wedge b^{\perp\perp})=0$, si et seulement si $x\wedge a^{\perp\perp}\leq b^{\perp\perp\perp}$ (or, $b^{\perp\perp\perp}=b^\perp$), si et seulement si $x\wedge a^{\perp\perp}\wedge b=0$, si et seulement si (de la même manière) $x\wedge a\wedge b=0$, si et seulement si $x\leq(a\wedge b)^\perp$; ainsi, $(a\wedge b)^\perp=a^\perp\nabla b^\perp$. Enfin, la surjectivité est immédiate.

(b) Il est immédiat que $0^*=0$ et $1^*=1$. Pour tous a et b dans E, $(a\vee b)^*=a\nabla b$ par définition de ∇. De plus, en utilisant le (a), on obtient que $(a\wedge b)^*=(a\wedge b)^{\perp\perp}=$

$(a^\perp \nabla b^\perp)^\perp = (a^\perp \vee b^\perp)^{\perp\perp\perp} = (a^\perp \vee b^\perp)^\perp = a^{\perp\perp} \wedge b^{\perp\perp} = a^* \wedge b^*$. Encore une fois, la surjectivité est immédiate. □

COROLLAIRE 3.10. *Soit E un treillis pseudo-complémenté. Alors l'ensemble*

$$\{x \in E \mid x^\perp = 0\}$$

est stable par $\wedge$ (c'est donc un "filtre" de E, dans un sens généralisant le cas des algèbres de Boole de façon évidente).

PREUVE. Si $x^\perp = y^\perp = 0$, alors $(x \wedge y)^\perp = x^\perp \nabla y^\perp = 0 \nabla 0 = 0$. □

DÉFINITION. Un élément x d'un treillis pseudo-complémenté est *dense* quand $x^\perp = 0$ (on parle parfois d'*unité faible*).

PROPOSITION 3.11. *Soit E un treillis distributif pseudo-complémenté et soient a et b deux éléments de E.*

(a) *$a^* \leq b^*$ si et seulement si il existe un élément dense d de E tel que $a \wedge d \leq b$.*
(b) *$a^* = b^*$ si et seulement si il existe un élément dense d de E tel que $a \wedge d = b \wedge d$.*

PREUVE. (a) Supposons d'abord que $a \wedge d \leq b$ où $d^\perp = 0$. Alors $a^* = a^* \wedge 1 = a^* \wedge d^* = (a \wedge d)^* \leq b^*$. Réciproquement, supposons que $a^* \leq b^*$. Posons $d = a^\perp \vee b$. Alors $d^\perp = a^{\perp\perp} \wedge b^\perp \leq b^{\perp\perp} \wedge b^\perp = 0$, donc d est dense. De plus (*on utilise ici la distributivité*) $a \wedge d = a \wedge (a^\perp \vee b) = (a \wedge a^\perp) \vee (a \wedge b) = a \wedge b \leq b$.

(b) S'il existe un élément dense d tel que $a \wedge d = b \wedge d$, alors, par (a), $a^* \leq b^*$ et $b^* \leq a^*$, d'où $a^* = b^*$. Réciproquement, si $a^* = b^*$, alors, par (a), il existe deux éléments denses d' et d'' tels que $a \wedge d' \leq b$ et $b \wedge d'' \leq a$. Par le Corollaire 3.10, $d = d' \wedge d''$ est dense, et il vient immédiatement que $a \wedge d = b \wedge d$. □

PROPOSITION 3.12. *Soit E un treillis pseudo-complémenté complet. Alors l'algèbre de Boole des éléments fermés de E est complète.*

PREUVE. Soit X une partie de B, soit $a = \bigwedge X$. On montre que a^* est la borne inférieure de X dans B. Tout d'abord, pour tout $x \in X$, $a^* \leq x^* = x$, donc a^* est un minorant de X (dans B). Si b est un minorant de X dans B, alors $b \leq a$, donc $b \leq a^*$. Par suite, $a^* = a$, ce qui montre notre assertion. □

EXEMPLE 3.13. Soit E le treillis des ouverts d'un espace topologique. Alors un élément de E est fermé si et seulement si il est un ouvert régulier de E. Par suite, E étant complet, nous retrouvons le résultat du Théorème 4.3 disant que *l'ensemble des ouverts réguliers de E est une algèbre de Boole complète.*

Une situation un peu plus générale est donnée par la définition suivante.

DÉFINITION. Une *algèbre de Heyting* (ou: *treillis relativement pseudo-complémenté*, ou *treillis de Brouwer*) est un treillis dans lequel pour tous éléments a et b, il existe un plus grand élément c, noté $a \to b$, tel que $a \wedge c \leq b$.

Parmi les exemples du début du chapitre, les trois premiers sont des algèbres de Heyting. *Voir* les exercices du Chapitre 2 sur les algèbres de Heyting! Les algèbres de Boole sont à la *logique classique* ce que les algèbres de Heyting sont à la *logique intuitionniste*, cette dernière étant (très grossièrement) "celle pour laquelle $\neg\neg p$ n'est plus nécessairement équivalent à p". En posant $x^\perp = x \to 0$, on obtient immédiatement la proposition suivante:

PROPOSITION 3.14. *Toute algèbre de Heyting avec* 0 *est un treillis pseudo-complémenté.*

La complétude admet une caractérisation commode pour les algèbres de Heyting:

PROPOSITION 3.15. *Un treillis complet est une algèbre de Heyting si et seulement si il satisfait la loi de* distributivité infinie *suivante:*

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee (a \wedge X) \qquad \textit{pour tout élément } a \textit{ et toute partie } X.$$

(on dit parfois que E est un treillis local*).*

PREUVE. Soit E un treillis complet. Supposons d'abord que E soit une algèbre de Heyting, et soient $a \in E$ et $X \subseteq E$. Posons $b = \bigvee X$ et $c = \bigvee(a \wedge X)$. Il est toujours vrai que $c \leq a \wedge b$. Réciproquement, pour tout $x \in X$, $a \wedge x \leq c$ par définition de c, d'où $x \leq a \to c$; ainsi, $b = \bigvee X \leq a \to c$, d'où $a \wedge b \leq c$: ainsi, $a \wedge b = c$, d'où la distributivité infinie. Réciproquement, si E satisfait la loi de distributivité infinie, soient a et b dans E et posons $X = \{x \in E \mid a \wedge x \leq b\}$. Soit $c = \bigvee X$. Alors pour tout x tel que $a \wedge x \leq b$, l'inégalité $x \leq c$ a lieu, par définition de X et de c; de plus, $a \wedge c = a \wedge \bigvee X = \bigvee(a \wedge X) \leq b$, et donc $a \to b$ existe et est égal à c. Donc E est une algèbre de Heyting. □

Notons qu'un argument similaire montre que *toute algèbre de Heyting est un treillis distributif* (*voir* l'Exercice 2.22(d)).

Le Théorème 3.8 est à rapprocher du résultat plus simple suivant, qui aura également son utilité:

PROPOSITION 3.16. *Soit E un treillis distributif borné. Alors l'ensemble des éléments de E qui admettent un complément est une sous-algèbre de Boole de E.*

PREUVE. Soit C l'ensemble des éléments de E qui admettent un complément. Pour tout $x \in C$, notons comme d'habitude $\neg x$ le complément de x (unique par le Lemme 2.4). Alors x est le complément de $\neg x$, et donc C est stable par complémentation. Il est de plus évident que $0 \in C$. Enfin, pour tous éléments a et b de C,

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) = 0\\ (a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &= (a \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a \vee \neg b) = 1,\end{aligned}$$

donc $\neg a \vee \neg b$ est le complément de $a \wedge b$. En remplaçant a par $\neg a$ est b par $\neg b$, on obtient que $\neg a \wedge \neg b$ est le complément de $a \vee b$.

Par suite, C est un sous-treillis de E contenant 0 et 1 pour éléments, stable par l'opération $\neg$. □

En rassemblant les résultats du Théorème 3.8 et de la Proposition 3.16, on obtient le résultat suivant:

PROPOSITION 3.17. *Soit E un treillis distributif pseudo-complémenté. Soit B l'ensemble des éléments fermés de E, soit C l'ensemble des éléments de E admettant un complément. Alors $(C, \vee, \wedge, 0, 1)$ est une sous-algèbre de Boole de $(B, \nabla, \wedge, 0, 1)$.*

PREUVE. On montre d'abord que $C \subseteq B$. Montrons pour cela que pour tout $a \in C$, $\neg a$ est le pseudo-complément de a. Tout d'abord, $a \wedge \neg a = 0$; de plus, pour tout $x \in E$ tel que $a \wedge x = 0$, les égalités

$$\begin{aligned} x &= x \wedge 1 \\ &= x \wedge (a \vee \neg a) \\ &= (x \wedge a) \vee (x \wedge \neg a) \\ &= x \wedge \neg a \\ &\leq \neg a \end{aligned}$$

sont satisfaites, ce qui montre notre assertion. Il en résulte que pour tout $a \in C$, a est le pseudo-complément de $\neg a$, et donc, par définition, $a \in B$. Pour conclure, il suffit de montrer que pour tous a et b dans C, l'égalité $a \nabla b = a \vee b$ est satisfaite. Mais nous avons vu dans la Proposition 3.16 que $a \vee b \in C$, donc (puisque $C \subseteq B$) $a \vee b \in B$, d'où $a \nabla b = (a \vee b)^* = a \vee b$. □

Notons en particulier que toute algèbre de Heyting avec 0 est un treillis distributif pseudo-complémenté, donc la proposition ci-dessus s'y applique. *Voir* également à ce sujet l'Exercice 3.7.

Exercices du Chapitre 3

EXERCICE 3.1. Montrer sur un exemple que la relation binaire "x est le pseudo-complément de y" n'est pas forcément symétrique.

EXERCICE 3.2. Quelle est la plus petite algèbre de Heyting finie (*voir* l'Exercice 2.22(e)) ne satisfaisant *pas* l'axiome $(\forall x)(x^{\perp\perp} = x)$? Quel est le rapport avec l'Exercice 3.1?

EXERCICE 3.3. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$, muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par

$$f \leq g \iff (\forall x \in [0, 1])\big(f(x) \leq g(x)\big).$$

Montrer que E est un treillis distributif borné, mais n'est pas une algèbre de Heyting.

EXERCICE 3.4. Soit F l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$, muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par

$$f \leq g \iff (\forall x \in [0, 1])\big(f(x) \leq g(x)\big).$$

Montrer que F est une algèbre de Heyting complète, ne satisfaisant pas l'axiome $(\forall x)(x^{\perp\perp} = x)$. Montrer sur un dessin la signification "géométrique" de $f^{\perp}$ et $f^{\perp\perp}$ pour tout $f \in F$.

EXERCICE 3.5. Trouver un exemple de treillis fini à la fois complémenté et pseudo-complémenté qui ne soit *pas* une algèbre de Boole.

EXERCICE 3.6. Cet exercice se propose d'établir en particulier que *tout treillis uniquement complémenté [*i.e.*, dans lequel tout élément admet exactement un complément]* fini *est une algèbre de Boole* (*Note:* c'est faux en général dans le cas infini). On rappelle que si E est un treillis, un *atome* de E est un élément p de $E \setminus \{0\}$ tel qu'il n'existe pas d'élément x de E tel que $0 < x < p$.

(a) Soit E un treillis uniquement complémenté et soient p et q deux atomes distincts de P.
  (a1) Supposons que $p \not\leq \neg q$. Poser $r = p \vee \neg q$. Montrer que $r > \neg q$.
  (a2) Supposons encore que $p \not\leq \neg q$. Montrer que si $r \not\geq q$, alors $r = \neg q$, alors que si $r \geq q$, alors $r = 1$; en déduire une contradiction dans les deux cas.
  (a3) En déduire que $p \leq \neg q$.

(b) Soit E un treillis *complet* uniquement complémenté tel que tout élément non nul de E majore au moins un atome de E. Notons P l'ensemble des atomes de E.
  (b1) Montrer que pour tous $p \in P$ et $X \subseteq P$, $p \leq \bigvee X$ si et seulement si $p \in X$ (***Indication:*** on pourra utiliser le résultat de (a)).
  (b2) Pour tout $x \in E$, on pose

$$S(x) = \{p \in P \mid p \leq x\},$$

et, pour tout $X \subseteq P$, on pose

$$J(X) = \bigvee X.$$

Montrer que $S(0) = \varnothing$, $J(\varnothing) = 0$, $S(1) = P$, $J(P) = 1$ (***Indication:*** pour prouver la dernière égalité, on pourra utiliser le résultat de (a)).
  (b3) Montrer que $S \circ J = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}(P)}$.
  (b4) Soit $x \in E$. Posons $X = S(x)$ et $X' = P \setminus X$. Montrer que $J(X) \leq x$ et $x \wedge J(X') = 0$. En déduire que x est le complément de $J(X')$; en remplaçant x par $\neg x$, en déduire que $x = J(S(x))$.
  (b5) En déduire que S et J sont deux isomorphismes de treillis, qui sont inverses l'un de l'autre. Par suite, E est une algèbre de Boole (et $E \cong \mathfrak{P}(P)$).

(c) En déduire que tout treillis uniquement complémenté fini est une algèbre de Boole.

Exercice 3.7. Soit E une algèbre de Heyting; notons, comme dans la Proposition 3.17, B l'ensemble des éléments fermés de E, et C l'ensemble des éléments de E admettant un complément. Trouver des exemples où $C \subsetneqq B \subsetneqq E$, ou bien où $C = B \subsetneqq E$.

CHAPITRE 4

Algèbres de Boole complètes; Théorème de prolongement de Sikorski

Le but de ce chapitre est de développer plus spécialement des bases de la théorie des algèbres de Boole *complètes*—par exemple le procédé de *complétion* (Théorème 4.4), qui entraîne que toute algèbre de Boole se plonge dans une algèbre de Boole complète (Théorème 4.5). L'un des résultats les plus importants dans ce domaine est également le Théorème de Sikorski [**Siko1**], Théorème 4.8 ici, qui donne une caractérisation *algébrique* des algèbres de Boole complètes (Corollaires 4.9 et 4.10).

Définition-notation. *Un treillis E est dit* complet *quand toute partie X de E admet une borne supérieure, alors notée $\bigvee X$.*

Il est alors classique (*voir* l'Exercice 2.4) que toute partie X de E admet une borne inférieure (qui est la borne supérieure, mais aussi le plus grand élément, de l'ensemble de ses minorants), naturellement notée $\bigwedge X$. Cette notion se relativise si l'on se restreint aux parties *dénombrables*:

Définition. Un treillis E est dit *σ-complet* quand toute partie *dénombrable* de E admet une borne supérieure *et* une borne inférieure.

Dans le cas où E est une *algèbre de Boole*, il suffit évidemment de vérifier que toute partie dénombrable de E admet une borne supérieure (resp., que toute partie dénombrable de E admet une borne inférieure)—ceci se voit immédiatement en utilisant l'anti-automorphisme $x \mapsto \neg x$. Dans le cas où E n'est pas une algèbre de Boole, les deux affaiblissements naturels de la définition ci-dessus ne sont pas équivalents—*voir* l'Exercice 4.4.

Lemme 4.1. *Soit B une algèbre de Boole complète, soient $a \in B$ et $X \subseteq B$. Alors les* lois de distributivité infinie *suivantes sont valides:*

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee (a \wedge X),$$
$$a \vee \bigwedge X = \bigwedge (a \vee X)$$

(où l'on pose naturellement $a \wedge X = \{a \wedge x \mid x \in X\}$ et $a \vee X = \{a \vee x \mid x \in X\}$.) Idem dans le cas où B est σ-complète et X est dénombrable.

(*voir* à ce sujet les Exercices 2.4 et 2.20).

Preuve. Prouvons par exemple la première égalité, dans le cas où B est complète. Posons donc $b = \bigvee X$ et $c = \bigvee (a \wedge X)$. Pour tout $x \in X$, l'inégalité $x \leq b$ a lieu, donc également $a \wedge x \leq a \wedge b$; donc $c = \bigvee (a \wedge X) \leq a \wedge b$. Réciproquement, pour tout $x \in X$, l'inégalité $a \wedge x \leq c$ est satisfaite, ce qui est équivalent à $x \leq \neg a \vee c$; par suite, $b = \bigvee X \leq \neg a \vee c$, d'où $a \wedge b \leq c$. Ainsi, $a \wedge b = c$. Le reste s'obtient de façon similaire, ou par dualité. $\square$

Un exemple très simple d'algèbre de Boole complète est celui des $\mathfrak{P}(X)$, pour tout ensemble X (*voir* les Exercices 4.1 et 4.2)—on parle alors d'algèbre de Boole *atomique complète*. Un autre exemple, nettement moins trivial mais fondamental, est celui que nous allons décrire à présent.

LEMME 4.2. *Soit X un espace topologique. Alors le treillis des ouverts de X est un treillis complet pseudo-complémenté.*

PREUVE. Soit $\mathcal{X}$ le treillis des ouverts de X. Toute réunion d'éléments de $\mathcal{X}$ appartient à $\mathcal{X}$, donc $\mathcal{X}$ est un treillis complet. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X, alors sa borne supérieure et sa borne inférieure sont données, respectivement, par

$$\bigvee_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} U_i,$$
$$\bigwedge_{i\in I} U_i = \operatorname{Int} \bigcap_{i\in I} U_i.$$

Si U est un ouvert de X, alors un ouvert V de X est disjoint de U si et seulement si il est disjoint de l'adhérence $\operatorname{Cl} U$ de U, si et seulement si $V \subseteq \complement \operatorname{Cl} U$. En particulier, $\mathcal{X}$ est pseudo-complémenté, et le pseudo-complément de U est donné par l'expression suivante:

$$U^{\perp} = \complement \operatorname{Cl} U. \qquad \square$$

Il est alors intéressant de calculer $U^* = U^{\perp\perp}$ (en utilisant de nouveau les notations du Chapitre 3):

$$\begin{aligned} U^* &= U^{\perp\perp} \\ &= \complement \operatorname{Cl} \complement \operatorname{Cl} U \\ &= \complement\complement \operatorname{Int} \operatorname{Cl} U \\ &= \operatorname{Int} \operatorname{Cl} U. \end{aligned}$$

DÉFINITION. Soit X un espace topologique. Un ouvert U de X est *régulier*, quand il est un élément fermé du treillis pseudo-complémenté des ouverts de X.

Les ouverts réguliers de X sont donc les ouverts U de X tels que $U = \operatorname{Int} \operatorname{Cl} U$. Par le Lemme 3.6, ce sont aussi les ouverts de X de la forme $\operatorname{Int} \operatorname{Cl} U$, où U est un ouvert (arbitraire) de X.

Notons que conformément à la terminologie, tout ouvert régulier de X est tout d'abord un *ouvert*! Un exemple typique d'ouvert non régulier, par exemple pour $X = \mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, est $U =]0, 1[\cup]1, 2[$—on a alors $\operatorname{Int} \operatorname{Cl} U =]0, 2[\neq U$.

THÉORÈME 4.3. *Soit X un espace topologique. Alors l'ensemble $\mathcal{B}$ des ouverts réguliers de X, muni de l'inclusion, est une algèbre de Boole complète, dans laquelle l'inf et le sup des paires d'éléments sont donnés respectivement par*

$$U \wedge V = U \cap V, \tag{4.1}$$
$$U \vee V = \operatorname{Int} \operatorname{Cl}(U \cup V) \tag{4.2}$$

et où la négation est donnée par

$$\neg U = \complement \operatorname{Cl} U. \tag{4.3}$$

Preuve. L'assertion que $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole résulte immédiatement du Théorème 3.8. L'assertion que $\mathcal{B}$ est complète résulte immédiatement de la Proposition 3.12.

Les expressions (4.1), (4.2), et (4.3) résultent immédiatement de la Proposition 3.9(b). □

La borne supérieure et la borne inférieure d'une famille quelconque $(U_i)_{i\in I}$ d'ouvert réguliers de X sont respectivement données par les formules suivantes:

$$\bigvee_{i\in I} U_i = \operatorname{Int}\operatorname{Cl}\bigcup_{i\in I} U_i,$$
$$\bigwedge_{i\in I} U_i = \operatorname{Int}\operatorname{Cl}\bigcap_{i\in I} U_i.$$

En fait, il se trouve que toute algèbre de Boole complète est isomorphe à l'algèbre de Boole des ouverts réguliers d'un certain espace topologique—cependant, comme nous allons le voir, d'un espace topologique de la pire espèce...

Définition-notation. *Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné (*i.e., *$\leq$ est une relation binaire réflexive et transitive sur P). Pour toute partie X de P, notons*

$$\downarrow X = \{p \in P \mid (\exists x \in X)(p \leq x)\};$$
$$\uparrow X = \{p \in P \mid (\exists x \in X)(p \geq x)\}.$$

(nous noterons $\downarrow_P X$ ou $\uparrow_P X$ si le contexte n'est pas clair). Nous dirons que X est un segment initial *(resp.,* segment final*) de P quand $X = \downarrow X$ (resp., $X = \uparrow X$). Si X est un singleton $\{x\}$, nous noterons souvent $\downarrow x$ (resp., $\uparrow x$) au lieu de $\downarrow\{x\}$ (resp., $\uparrow\{x\}$).*

Il est immédiat que l'ensemble des segments initiaux (resp., finaux) de X est stable par réunions et intersections arbitraires, et a $\varnothing$ et P pour éléments. Par suite, ce sont *a fortiori* des topologies:

Définition. Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné. La *topologie gauche* (resp., la *topologie droite*) sur P est la topologie dont les ouverts sont les segments initiaux (resp., finaux) de P.

Ces topologies sont rarement séparées, mais elles ont la propriété étrange que toute intersection (finie ou pas) d'ouverts est un ouvert, ce qui est bien inhabituel...; en fait, ceci caractérise les topologies gauches (ou droites) sur un ensemble préordonné (*voir* l'Exercice 4.6).

Définition-notation. *Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné. Pour tous p et q dans P, on dit que p et q sont* compatibles*, et on note $p \mid_P q$, quand il existe $r \in P$ tel que $r \leq p$ et $r \leq q$. Sinon, on dit que p et q sont* incompatibles*, et on note $p \perp_P q$.*

Si le contexte est clair, nous noterons juste $p \mid q$ ou $p \perp q$.

Définition. Soit P un sous-ensemble d'un ensemble préordonné Q. On dit que P est

— *cofinal* dans Q, quand $(\forall q \in Q)(\exists p \in P)(q \leq p)$;
— *coinitial* dans Q, quand $(\forall q \in Q)(\exists p \in P)(p \leq q)$.

On dit parfois (surtout en théorie du forcing) *dense* au lieu de coinitial.

Le Théorème suivant permet de construire toutes les algèbres de Boole complètes. Il est également à la base de la théorie du *forcing*.

THÉORÈME 4.4. *Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné. Alors il existe une algèbre de Boole complète B et une application $e\colon P \to B\setminus\{0\}$ satisfaisant les conditions suivantes:*

(i) *e est croissante;*

(ii) *e est "équicompatible",* i.e.,

$$(\forall p, q \in P)\big(p \mid_P q \iff e(p) \wedge e(q) \neq 0\big);$$

(iii) *L'image de e est coinitiale dans $B \setminus \{0\}$.*

De plus, le couple (e, B) est unique à isomorphisme près.

PREUVE. Munissons P de sa topologie gauche, et soit B l'algèbre de Boole complète des ouverts réguliers de P pour cette topologie (on utilise ici le Théorème 4.3). Puis on définit $e\colon P \to B$ en posant, pour tout $p \in P$, $e(p) = \operatorname{Int}\operatorname{Cl}(\downarrow p)$. Ainsi, $e(p)$ est un ouvert régulier de P, donc *a fortiori* une partie de P, et il est donc naturel de savoir quels sont ses éléments:

FAIT 1. *Pour tous p et q dans P,*

$$p \in e(q) \iff (\forall r \leq p)(r \mid q).$$

PREUVE DU FAIT. Il est facile de vérifier directement que pour toute partie X de P, les égalités suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned}\operatorname{Int} X &= \{p \in P \mid \downarrow p \subseteq X\}\\ \operatorname{Cl} X &= \{p \in P \mid (\exists x \in X)(x \leq p)\} = \uparrow X\end{aligned}$$

(*voir* à ce sujet l'Exercice 4.5). Par suite, pour tous p et q dans P, $p \in e(q)$ si et seulement si $\downarrow p \subseteq \operatorname{Cl}(\downarrow q)$, si et seulement si pour tout $r \leq p$, il existe $s \in \downarrow q$ tel que $r \geq s$, les deux dernières conditions signifiant que $r \mid q$. □ Fait 1.

Notons qu'en particulier, $p \in e(p)$, donc $e(p) \neq \varnothing$, et e est donc bien une application de P vers $B \setminus \{\varnothing\}$. Il en résulte également de façon immédiate que e est croissante, *i.e.*, $p \leq q$ implique $e(p) \subseteq e(q)$. Par suite, si $p \mid q$, alors il existe $r \in P$ tel que $r \leq p$ et $r \leq q$, et par suite, e étant croissante, $e(p) \cap e(q)$ contient $e(r)$, et est donc non vide. Réciproquement, supposons que $e(p) \cap e(q) \neq \varnothing$. Soit donc $r \in e(p) \cap e(q)$. Puisque $r \in e(p)$, r et p sont compatibles (en utilisant le Fait 1), d'où l'existence de $s \in P$ tel que $s \leq r$ et $s \leq p$; puisque $e(q)$ est un segment initial de $(P, \leq)$ et $s \leq r \in e(q)$, s appartient à $e(q)$, et donc $s \mid q$, d'où l'existence de $t \in P$ tel que $t \leq s$ et $t \leq q$; par suite, $t \leq p$ et $t \leq q$, donc $p \mid q$. Nous avons ainsi montré le point (ii).

Enfin, pour tout $U \in B \setminus \{\varnothing\}$, soit $p \in U$; alors, U étant ouvert (*i.e.*, U est un segment initial de P), $\downarrow p \subseteq U$, et, par suite,

$$e(p) = \operatorname{Int}\operatorname{Cl}(\downarrow p) \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Cl} U = U.$$

Ainsi, l'image de e est coinitiale dans $B \setminus \{\varnothing\}$. Ceci prouve la partie "existence".

Voyons maintenant la partie "unicité". Soient donc $e\colon P \to B \setminus \{0_B\}$ et $e'\colon P \to B' \setminus \{0_{B'}\}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. Nous allons construire deux homomorphismes d'algèbre de Boole $\varphi\colon B \to B'$ et $\psi\colon B' \to B$, inverses

l'un de l'autre (donc ce seront des isomorphismes), tels que $\varphi \circ e = e'$. Définissons donc une application φ de B vers B' par la règle suivante:

$$\varphi(u) = \bigvee\{e'(p) \mid p \in P \text{ et } e(p) \leq u\}.$$

Nous aurons besoin du Fait suivant:

Fait 2. *Pour tout $p \in P$ et tout $u \in B$, l'implication $e(p) \leq u \Leftrightarrow e'(p) \leq \varphi(u)$ a lieu.*

Preuve du Fait. L'implication directe résulte immédiatement de la définition de φ. Réciproquement, supposons $e'(p) \leq \varphi(u)$. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $e(p) \not\leq u$, ce qui peut encore s'écrire $e(p) \wedge \neg u \neq 0$. Puisque l'image de e est coinitiale dans $B \setminus \{0\}$, il existe $p' \in P$ tel que $e(p') \leq e(p) \wedge \neg u$. Puisque $e(p') \leq e(p) \wedge e(p')$, l'inégalité $e(p) \wedge e(p') \neq 0$ est satisfaite, d'où, puisque e est équicompatible, $p \mid p'$, il existe donc $q \in P$ tel que $q \leq p$ et $q \leq p'$. Puisque $q \leq p'$, l'égalité $e(q) \wedge u = 0$ est satisfaite. Puisque $q \leq p$, l'égalité $e'(q) \leq e'(p) \leq \varphi(u) = \bigvee\{e'(r) \mid e(r) \leq u\}$ est satisfaite, donc, par le Lemme 4.1, il existe $r \in P$ tel que $e(r) \leq u$ et $e'(q) \wedge e'(r) \neq 0$. Puisque e' est équicompatible, $q \mid r$, donc il existe $s \in P$ tel que $s \leq q$ et $s \leq r$. Puisque $s \leq q$, l'égalité $e(s) \wedge u = 0$ est satisfaite. Puisque $s \leq r$, l'inégalité $e(s) \leq e(r) \leq u$ est satisfaite; d'où une contradiction. □ Fait 2.

Fait 3. *Pour tout $u \in B$,*

$$u = \bigvee\{e(p) \mid p \in P \text{ et } e(p) \leq u\}.$$

Preuve du Fait. Posons $u' = \bigvee\{e(p) \mid p \in P \text{ et } e(p) \leq u\}$. Il est clair que $u \geq u'$. Supposons que $u > u'$. Donc $u \wedge \neg u' \neq 0$, il existe donc, puisque l'image de e est coinitiale dans $B \setminus \{0\}$, $p \in P$ tel que $e(p) \leq u \wedge \neg u'$. Mais puisque $e(p) \leq u$, l'inégalité $e(p) \leq u'$ est satisfaite, par définition de u', d'où une contradiction puisque $e(p) \wedge u' = 0$. □ Fait 3.

On peut alors aussi définir de façon similaire une application ψ de B' vers B en posant

$$\psi(v) = \bigvee\{e(p) \mid p \in P \text{ et } e'(p) \leq v\}.$$

Pour tout $u \in B$,

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(u) &= \bigvee\{e(p) \mid e'(p) \leq \varphi(u)\} \\
&= \bigvee\{e(p) \mid e(p) \leq u\} && \text{par le Fait 2} \\
&= u && \text{par le Fait 3.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_B$. On aurait montré de la même façon que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{B'}$. Ainsi, φ et ψ sont deux bijections, inverses l'une de l'autre. Mais il est clair que φ et ψ sont croissantes: par suite, ce sont des isomorphismes d'ensembles ordonnés, donc, l'inf, le sup, 0 et 1 étant définissables en fonction de l'ordre, φ et ψ sont des isomorphismes d'algèbres de Boole.

Il reste à vérifier que $\varphi \circ e = e'$. Soit donc $p \in P$. Posons $u = e(p)$. On a $e(p) \leq u$, donc, par définition de φ, $e'(p) \leq \varphi(u)$. Ainsi, $e' \leq \varphi \circ e$, d'où, en composant avec l'application croissante ψ, $\psi \circ e' \leq \psi \circ \varphi \circ e = e$. De même, on aurait montré $\varphi \circ e \leq e'$. Puisque $e' \leq \varphi \circ e$, on obtient $e' = \varphi \circ e$. □

Le couple (e, B)—ou $e\colon P \to B$, ou, par un abus de langage courant, uniquement l'algèbre de Boole complète B—sera appelé la *complétion* de l'ensemble préordonné $(P, \leq)$. Plus spécifiquement, c'est donc l'algèbre de Boole complète des ouverts réguliers de P muni de sa topologie gauche. La construction de B à partir de P est indiquée sur la Figure 4.1.

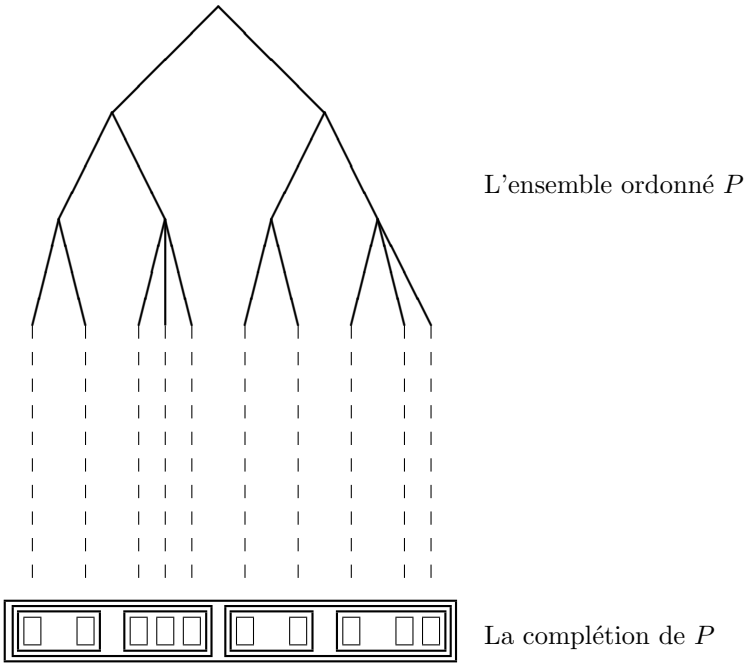

FIGURE 4.1. L'opération de complétion d'un ensemble ordonné

En réalité, on devrait représenter des intervalles plutôt que des "patates rectangulaires", mais il est malaisé de représenter des intervalles enboîtés quand il y en a beaucoup... Dans la Figure 4.1, les petits rectangles représentent les $e(p)$. Notons que dans cet exemple, l'application e est *injective*. Il est à noter que, bien que e soit souvent appelé "le plongement canonique de P dans son complété", e n'est en fait *pas* un plongement au sens usuel—e peut ne pas être injective, *voir* l'Exercice 4.11.

Nous allons à présent voir en particulier ce qui se produit lorsque P est une algèbre de Boole privée de son élément nul:

THÉORÈME 4.5. *Soit B une algèbre de Boole. Munissons $P = B \setminus \{0_B\}$ de l'ordre induit, et soit $e\colon P \to \bar{B}$ la complétion de P; on prolonge naturellement e en une application de B vers $\bar{B}$ en posant $e(0_B) = 0_{\bar{B}}$. Alors l'application e ainsi obtenue est un homomorphisme injectif d'algèbres de Boole.*

Ainsi, d'après ce Théorème, *toute algèbre de Boole se plonge dans une algèbre de Boole complète.* Notons qu'il n'y a pas unicité (loin de là!) de l'algèbre de Boole complète d'arrivée, même si l'on impose à B de l'engendrer comme algèbre de Boole complète. Cependant, celle qui est donnée par le Théorème 4.5 est très particulière—c'est la seule (à isomorphisme près) pour laquelle l'image de

$B \setminus \{0_B\}$ soit coinitiale parmi les éléments non nuls—nous l'appellerons également la *complétion* de B.

Preuve. Par définition, $e(0_B) = 0_{\bar{B}}$. De plus, par définition de e,

$$e(1_B) = \operatorname{Int}\operatorname{Cl}\left(\underset{P}{\downarrow} 1_B\right) = \operatorname{Int}\operatorname{Cl} P = P = 1_{\bar{B}}.$$

Montrons maintenant que e est un homomorphisme pour $\wedge$. Soient donc u et v dans B. Puisque e est évidemment *croissante*, $e(u \wedge v) \leq e(u) \wedge e(v)$. Si $u = 0_B$ ou $v = 0_B$, l'égalité est immédiate. Supposons donc que u et v sont tous deux non nuls (*i.e.*, dans P). Si $u \wedge v = 0_B$, alors $u \perp_P v$, donc, e étant équicompatible, $e(u) \wedge e(v) = 0_{\bar{B}}$ et on a de nouveau égalité. Supposons donc finalement que u, v, et $u \wedge v$ appartiennent à P, et supposons que $e(u \wedge v) < e(u) \wedge e(v)$; par suite, $w = e(u) \wedge e(v) \wedge \neg e(u \wedge v)$ est non nul, et, l'image de e étant coinitiale dans $\bar{B} \setminus \{0_{\bar{B}}\}$, il existe $p \in P$ tel que $e(p) \leq w$. Puisque $e(p) \leq e(u)$, p et u sont compatibles, il existe donc $q \in P$ tel que $q \leq p$ et $q \leq u$. Donc $e(q) \leq e(p) \leq e(v)$, il existe donc $r \leq q$ dans P tel que $r \leq v$. Par suite, $r \leq u \wedge v$, d'où $e(r) \leq e(u \wedge v)$. Mais $e(r) \leq e(p) \leq w$, donc $e(r) \wedge e(u \wedge v) = 0_{\bar{B}}$, une contradiction puisque $e(u \wedge v) \neq 0_{\bar{B}}$.

Montrons maintenant que e est un homomorphisme pour $\vee$. Soient donc u, v dans B, montrons que $e(u \vee v) = e(u) \vee e(v)$. C'est immédiat si $u = 0_B$ ou $v = 0_B$. Supposons donc que $u \in P$ et $v \in P$. L'application e étant croissante, $e(u) \vee e(v) \leq e(u \vee v)$. Supposons que l'égalité n'ait pas lieu, et soit $w = e(u \vee v) \wedge \neg(e(u) \vee e(v))$. Puisque l'image de e est coinitiale dans $\bar{B} \setminus \{0_{\bar{B}}\}$, il existe $p \in P$ tel que $e(p) \leq w$. Par suite, $e(p) \leq e(u \vee v)$ et il existe donc $q \leq p$ dans P tel que $q \leq u \vee v$. On a alors

$$e(q \wedge u) \leq e(q) \wedge e(u) \leq e(p) \wedge (e(u) \vee e(v)) \leq w \wedge (e(u) \vee e(v)) = 0_{\bar{B}},$$

donc $q \wedge u = 0_B$, et, de façon similaire, $q \wedge v = 0_B$. Mais $q \leq u \vee v$ et B est un treillis *distributif*, donc $q = q \wedge (u \vee v) = (q \wedge u) \vee (q \wedge v) = 0_B$, contradiction.

Nous avons donc montré que e est un homomorphisme de treillis bornés. C'est donc également un homomorphisme d'algèbres de Boole (si $u \in B$, alors $e(u) \wedge e(\neg u) = e(u \wedge \neg u) = e(0_B) = 0_{\bar{B}}$, et $e(u) \vee e(\neg u) = e(u \vee \neg u) = e(1_B) = 1_{\bar{B}}$, donc $e(\neg u) = \neg e(u)$).

Montrons enfin que e est injectif. Puisque e est un homomorphisme d'algèbres de Boole, il suffit, d'après la Proposition 2.7(e), de montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0_B\}$. Mais ceci est immédiat: si $p \in B \setminus \{0_B\}$, *i.e.*, $p \in P$, alors $e(p) \in \bar{B} \setminus \{0_{\bar{B}}\}$. □

Passons maintenant au Théorème de prolongement de Sikorski.

Notation. Soit A une sous-algèbre de Boole d'une algèbre de Boole B et soit $b \in B$. Notons $A[b]$ la sous-algèbre de Boole de B engendrée par $A \cup \{b\}$, *i.e.*, la plus petite (pour l'inclusion) sous-algèbre de Boole de B qui contient $A \cup \{b\}$.

Lemme 4.6. *Dans le contexte ci-dessus,*

$$A[b] = \{(x \wedge b) \vee (y \wedge \neg b) \mid x, y \in A\}.$$

Preuve. Pour tous x et y dans A, posons $[x, y] = (x \wedge b) \vee (y \wedge \neg b)$. Il est clair que toute sous-algèbre de Boole de B contenant $A \cup \{b\}$ contient tous les $[x, y]$

$(x, y \in A)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que pour tous x_0, x_1, y_0, y_1 dans A,

$$\begin{aligned}[x_0, y_0] \wedge [x_1, y_1] &= [x_0 \wedge x_1, y_0 \wedge y_1],\\ [x_0, y_0] \vee [x_1, y_1] &= [x_0 \vee x_1, y_0 \vee y_1],\\ \neg[x_0, y_0] &= [\neg x_0, \neg y_0],\end{aligned}$$

donc l'ensemble A' de tous les $[x, y]$ où $x, y \in A$ est stable par $\wedge$, $\vee$, et $\neg$. Il contient évidemment A (donc 0 et 1), $\{b\}$ (car $b = [1, 0]$) et donc $A[b]$. Ainsi, $A' = A[b]$. $\square$

Dans l'énoncé du Lemme suivant, nous adoptons la convention de notation suivante: si X et Y sont deux sous-ensembles d'un ensemble ordonné donné P, alors $X \leq Y$ sera une abréviation de $(\forall(x, y) \in X \times Y)(x \leq y)$. Si $X = \{x\}$ (resp., $Y = \{y\}$), alors nous noterons $x \leq Y$ (resp., $X \leq y$).

Lemme 4.7. *Soient A, B, et E des algèbres de Boole, soit $b \in B$; on suppose que $B = A[b]$ (en particulier, noter que $A \subseteq B$). Soit de plus $f\colon A \to E$ un homomorphisme d'algèbres de Boole et soit $\beta \in E$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *f se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de Boole $g\colon A[b] \to E$ tel que $g(b) = \beta$;*
(ii) *$\{f(x) \mid x \in A$ et $x \leq b\} \leq \beta \leq \{f(x) \mid x \in A$ et $x \geq b\}$.*

Preuve. (i)$\Rightarrow$(ii) Pour tout $x \in A$ tel que $x \leq b$, l'égalité $f(x) = g(x) \leq g(b) = \beta$ est satisfaite. De façon similaire, si $x \in A$ et $x \geq b$, alors $f(x) \geq \beta$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Pour tous x, y, et z dans une algèbre de Boole donnée, notons $[x, y]_z = (x \wedge z) \vee (y \wedge \neg z)$. L'idée est d'essayer de définir g en envoyant $[x, y]_b$ sur $[f(x), f(y)]_\beta$. L'un des problèmes est que $[f(x), f(y)]_\beta$ peut ne pas dépendre uniquement de $[x, y]_b$. Soient donc $p\colon A \times A \to B$ et $q\colon A \times A \to E$ définies par $p(x, y) = [x, y]_b$ et $q(x, y) = [f(x), f(y)]_\beta$. Munissons $A \times A$ de sa structure d'algèbre de Boole produit.

Fait 1. *Les applications p et q sont des homomorphisme d'algèbres de Boole.*

Preuve du Fait. Vérification immédiate (et en fait, nous l'avons déjà montré dans le Lemme 4.6!). $\square$ Fait 1.

Fait 2. $\operatorname{Ker} p \subseteq \operatorname{Ker} q$.

Preuve du Fait. Soit $(x, y) \in A \times A$ tel que $p(x, y) = 0$, *i.e.*, $[x, y]_b = 0$. Par suite, $x \wedge b = y \wedge \neg b = 0$, d'où $b \leq \neg x$ et $y \leq b$; *par hypothèse sur* β, $\beta \leq f(\neg x) = \neg f(x)$ et $f(y) \leq \beta$, donc, en "retournant" l'argument précédent, $f(x) \wedge \beta = f(y) \wedge \neg\beta = 0$, d'où $[f(x), f(y)]_\beta = 0$. $\square$ Fait 2.

En identifiant comme au Chapitre 2 les algèbres de Boole aux anneaux de Boole (et donc en raisonnant comme en théorie de anneaux), on en déduit d'après les Théorèmes généraux sur les anneaux (et puisque p est surjectif) qu'il existe un unique homomorphisme d'algèbres de Boole $g\colon B \to E$ tel que $g \circ p = q$, *i.e.*, pour tous x et y dans A, l'égalité $g([x, y]_b) = [f(x), f(y)]_\beta$ est satisfaite. Par suite $g(b) = g([1, 0]_b) = [1, 0]_\beta = \beta$, et pour tout $x \in A$, on a $g(x) = g([x, x]_b) = [f(x), f(x)]_\beta = f(x)$. Donc g satisfait les conditions demandées. $\square$

Théorème 4.8 (Théorème de prolongement de Sikorski). *Toute algèbre de Boole complète est* injective, i.e., *si E est une algèbre de Boole complète et si A*

est une sous-algèbre de Boole d'une algèbre de Boole B, alors tout homomorphisme d'algèbres de Boole de A vers E se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de Boole de B vers E.

PREUVE. Soit $f\colon A \to E$ un homomorphisme d'algèbres de Boole. On montre d'abord que pour tout $b \in B$, f se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de Boole de $A[b]$ vers E. Posons $U = \{x \in A \mid x \leq b\}$ et $V = \{y \in A \mid y \geq b\}$. Pour tout $x \in U$ et tout $y \in V$, les inégalités $x \leq b \leq y$ sont satisfaites, donc $x \leq y$, d'où $f(x) \leq f(y)$; par suite, $f[U] \leq f[V]$. Soit $\beta = \bigvee f[U]$ (existe car E est *complète*). Alors $f[U] \leq \beta \leq f[V]$, donc, par le Lemme 4.7, f se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de Boole $g\colon A[b] \to E$ (en prime tel que $g(b) = \beta$).

Dans le cas général, soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les homomorphismes d'algèbres de Boole $g\colon C \to E$ avec $A \subseteq C \subseteq B$ et $f \subseteq g$. Alors $\mathcal{E}$ est non vide (f appartient à $\mathcal{E}$), et $(\mathcal{E}, \subseteq)$ est inductif (si $\mathcal{C}$ est une chaîne de $(\mathcal{E}, \subseteq)$, alors $\bigcup \mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{E}$ et majore $\mathcal{C}$). Par le Lemme de Zorn, $(\mathcal{E}, \subseteq)$ admet un élément maximal, disons $g\colon C \to E$. Supposons que $C \neq B$, et soit alors $b \in B \setminus C$. D'après la première partie de la preuve, g se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de Boole $h\colon C[b] \to E$; mais ceci contredit la maximalité de g. Par suite, $C = B$ et donc g est un homomorphisme d'algèbres de Boole de B vers E prolongeant f. □

À partir du Théorème 4.5, nous pouvons alors caractériser les algèbres de Boole complètes:

COROLLAIRE 4.9. *Soit E une algèbre de Boole. Alors E est complète si et seulement si elle est injective,* i.e.*, pour toute sous-algèbre de Boole A d'une algèbre de Boole B, tout homomorphisme d'algèbres de Boole de A vers E se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de Boole de B vers E.*

PREUVE. Nous venons de voir dans le Théorème 4.8 que toute algèbre de Boole complète est injective. Réciproquement, soit E une algèbre de Boole injective. Par le Théorème 4.5, E se plonge dans une algèbre de Boole complète B. Puisque E est injective, l'identité de E se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de Boole $\pi\colon B \to E$. Notons que π est une *rétraction* de B sur E, *i.e.*, $\pi\restriction_E = \mathrm{id}_E$. Si X est une partie de E, il est alors facile de vérifier que $\pi(\bigvee X)$ est la borne supérieure de X dans E. Donc E est complète. □

DÉFINITION. Soit A une sous-algèbre de Boole d'une algèbre de Boole B. On dit que A est un *rétracte* de B quand il existe un homomorphisme d'algèbres de Boole $\pi\colon B \to A$ (que l'on appelle alors une *rétraction*) tel que $\pi\restriction_A = \mathrm{id}_A$.

COROLLAIRE 4.10. *Soit E une algèbre de Boole. Alors E est complète si et seulement si elle est [isomorphe à un] rétracte de $\mathfrak{P}(S)$ pour un certain ensemble S.*

PREUVE. Si E est un rétracte de $\mathfrak{P}(S)$ pour un certain ensemble S, alors, puisque $\mathfrak{P}(S)$ est complète, le raisonnement final de la preuve du Corollaire 4.9 montre directement que E est complète. Réciproquement, supposons que E soit complète. Soit S l'espace de Stone de E, et soit $\varphi\colon E \to \operatorname{Clop} S$ l'isomorphisme naturel (donné dans le Théorème 2.19(a)). Puisque E est injective, $\operatorname{Clop} S$ est également injective, donc, par le raisonnement de la preuve du Corollaire 4.9, $\operatorname{Clop} S$ est un rétracte de $\mathfrak{P}(S)$, d'où la conclusion puisque E est isomorphe à $\operatorname{Clop} S$. □

Exercices du Chapitre 4

EXERCICE 4.1. Soit B une algèbre de Boole. Un élément *non nul* a de B est un *atome* de B quand tout élément x de B tel que $0 \leq x \leq a$ est égal soit à 0, soit à a.

(a) Montrer que pour tout ensemble X, les atomes de $\mathfrak{P}(X)$ sont exactement les *singletons* $\{x\}$ où $x \in X$.
(b) Soit $\mathcal{B}$ la sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{Q}$ à extrémités rationnelles (donc $\mathcal{B}$ est l'algèbre des réunions finies d'intervalles de $\mathbb{Q}$), et soit $\mathcal{I}$ l'idéal des parties *finies* de $\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ n'a pas d'atomes.
(c) On dit qu'une algèbre de Boole B est *atomique* quand tout élément non nul de B majore un atome de B. Montrer que si B est complète, alors les conditions suivantes sont équivalentes:
  (i) B est atomique;
  (ii) La borne supérieure de l'ensemble des atomes de B est égale à 1;
  (iii) B est isomorphe à $\mathfrak{P}(X)$ pour un certain ensemble X.

EXERCICE 4.2. * Montrer qu'une algèbre de Boole complète B est isomorphe à $\mathfrak{P}(X)$ pour un certain ensemble X si et seulement si elle est *complètement distributive*, *i.e.*, pour toute famille $(X_i)_{i\in I}$ de parties de B, l'identité

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee X_i = \bigvee_{f\in\prod_{i\in I} X_i} \bigwedge f[I]$$

est satisfaite (*voir* l'Exercice 2.12, mais noter que I et les X_i peuvent être infinis). ***Indication:*** Noter que l'inégalité

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee X_i \geq \bigvee_{f\in\prod_{i\in I} X_i} \bigwedge f[I]$$

est toujours satisfaite. Dans le cas où $B = \mathfrak{P}(X)$, établir directement l'inégalité réciproque.

Réciproquement, supposons B complètement distributive. Appliquer l'identité de distributivité complète à

$$1 = \bigwedge_{x\in B} (x \vee \neg x),$$

pour en déduire que

$$\bigvee_{X\subseteq B} \Big(\bigwedge X \wedge \neg \bigvee (B \setminus X)\Big) = 1.$$

D'après le (c) de l'Exercice 4.1, il suffit donc de montrer que pour toute partie X de B, $u_X = \bigwedge X \wedge \neg \bigvee (B \setminus X)$ est soit nul soit un atome de B. Posons $a = \bigwedge X$ et $b = \bigvee (B \setminus X)$. Montrer que si $0 < u \leq u_X$, alors u appartient à X; en déduire que $u_X \in X$, puis que u et u_X sont tous deux $\leq u \wedge u_X$, puis que $u = u_X$. Conclure.

EXERCICE 4.3. Montrer que $[0, 1]$ muni de son ordre naturel est un treillis complet complètement distributif (*voir* l'Exercice 4.2 pour la définition).

EXERCICE 4.4. On considère l'ensemble ordonné E dont la représentation intuitive est la suivante:

$$\xrightarrow{\omega_1}\xleftarrow{\omega}$$

(Rappelons que ω est le premier ordinal infini et que ω_1 est le premier ordinal non dénombrable). Une définition plus rigoureuse de E est la suivante: on pose

$$E = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \omega_1\} \cup \{(n, 1) \mid n \in \omega\},$$

l'ordre sur E étant défini par $x < y$ si et seulement si l'on se trouve dans l'un des cas suivants:

$$\begin{array}{llll} x = (\alpha, 0), & y = (\beta, 0), & \alpha < \beta; & \\ x = (m, 1), & y = (n, 1), & m > n & \text{(ceci n'est pas une faute de frappe);} \\ x = (\alpha, 0), & y = (m, 1). & & \end{array}$$

Montrer que E est un ensemble *totalement ordonné* (donc *a fortiori* un treillis) et que toute partie *dénombrable* de E admet une borne supérieure, mais que cependant, E a une partie dénombrable qui n'admet pas de borne inférieure.

Exercice 4.5. Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné.

(a) Quand la topologie gauche sur P est-elle *séparée*?
(b) Montrer qu'une partie de P est fermée pour la topologie gauche si et seulement si elle est ouverte pour la topologie droite. Quand la topologie gauche est-elle *connexe*? La connexité de la topologie gauche est-elle équivalente à la connexité de la topologie droite?
(c) Montrer que la topologie gauche est T_0 (*i.e.*, pour tous points $p \neq q$, il existe un ouvert U tel que soit $p \in U$ et $q \notin U$, soit $p \notin U$ et $q \in U$) si et seulement si $\leq$ est antisymétrique, *i.e.*, si et seulement si c'est une relation d'ordre.

Exercice 4.6. Soit E un espace topologique dans lequel toute intersection d'ouverts est un ouvert. Montrer que la topologie de E est la topologie gauche d'un certain préordre sur E. (***Indication:*** pour tout $x \in E$, montrer qu'il existe un plus petit voisinage ouvert de x, que nous noterons $N(x)$; montrer que l'on peut définir un préordre $\leq$ sur E en posant $x \leq y \Leftrightarrow x \in N(y)$; montrer qu'une partie U de E est un ouvert de E si et seulement si U est un segment initial pour $\leq$.)

Exercice 4.7. * Soit X un espace topologique. Une partie A de X est dite *rare* quand $\operatorname{Int}\operatorname{Cl} A = \varnothing$, *maigre* quand il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties rares de X telles que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On dit que X est un *espace de Baire* quand toute partie maigre de X est d'intérieur vide.

(a) Montrer que l'ensemble des parties rares de X est un *idéal* de $\mathfrak{P}(X)$ (*i.e.*, $\varnothing$ est rare, toute réunion finie de parties rares est rare et toute partie d'une partie rare est rare). Montrer que X lui-même est rare si et seulement si il est vide.
(b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des parties maigres de X est un σ-idéal de $\mathfrak{P}(X)$, *i.e.*, un idéal de $\mathfrak{P}(X)$ tel que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}(X)$, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{M}(X)$.
(c) Montrer que $\mathbb{Q}$ est maigre ("dans lui-même", *i.e.*, considéré comme partie de lui-même—muni de sa topologie naturelle).
(d) * Supposons que X soit un espace "*métrisable complet*"—*i.e.*, il existe une distance d sur X définissant la topologie pour laquelle (X, d) soit un espace métrique complet. Montrer que X est un espace de Baire. (C'est le "*Théorème de Baire*"—*voir* par exemple [**Oxto**]. ***Indication:*** il s'agit de montrer que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses de X et U est un ouvert non vide de X, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap U \neq \varnothing$. On peut supposer sans perte de généralité que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Construire par récurrence une suite décroissante $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de

boules fermées de rayon tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, telle que pour tout n, $B_n \subseteq U_n \cap U$; remarquer, en utilisant la complétude, que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$).

(e) * Montrer (par une méthode similaire à la question précédente) que tout espace topologique *localement compact* est un espace de Baire.

(f) On dit qu'une partie Y de X a la *propriété de Baire* quand il existe un ouvert U de X tel que $Y \triangle U$ soit maigre. Montrer que pour tout ouvert U, $\operatorname{Cl} U \setminus U$ est rare; en déduire que

$$\mathcal{B}(X) = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ a la propriété de Baire}\}$$

est une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(X)$, stable par réunion et intersection dénombrable (donc σ-complète). Noter que $\mathcal{B}(X)$ est la sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(X)$ engendrée par la réunion de l'ensemble des ouverts de X et de l'ensemble des parties maigres de X.

(g) Soit X un espace de Baire. Montrer que pour tous ouverts U et V de X, si $U \triangle V$ est maigre, alors $\operatorname{Cl} U = \operatorname{Cl} V$. En déduire que pour tout élément Y de $\mathcal{B}(X)$, il existe un seul ouvert *régulier* U de X tel que $Y \triangle U$ soit maigre.

(h) Montrer que l'application $Y \mapsto U$ précédente définit un *isomorphisme* de $\mathcal{B}(X)/\mathcal{M}(X)$ sur l'algèbre de Boole des ouverts réguliers de X (par suite, $\mathcal{B}(X)/\mathcal{M}(X)$ est une algèbre de Boole *complète*!).

Exercice 4.8. Soit B une algèbre de Boole. Une *antichaîne* de B est, par définition, une partie W de B telle que pour tous u, v dans W tels que $u \neq v$, l'égalité $u \wedge v = 0$ a lieu.

(a) Montrer (en utilisant le Lemme de Zorn) que pour toute partie X de B, il existe une "antichaîne maximale de X", *i.e.*, une partie W de X qui soit une antichaîne de B telle que pour toute antichaîne W' de B contenue dans X, $W \subseteq W'$ entraîne $W = W'$.

(b) Soit X un segment initial de B et soit W une antichaîne maximale de X. Montrer que W et X ont même ensemble de majorants. (***Indication:*** soit a un majorant de W et soit $x \in X$; supposons que $x \not\leq a$. En notant que $x \wedge \neg a$ appartient à X et en utilisant la maximalité de W, montrer qu'il existe un élément y de W tel que $y \wedge (x \wedge \neg a) \neq 0$; en déduire une contradiction).

(c) On dit que B est *dénombrablement saturée* (ou *σ-saturée*) quand toute antichaîne de B est [au plus] dénombrable. Montrer que si B est σ-complète et σ-saturée, alors B est complète (on pourra pour cela utiliser le résultat de la question précédente).

Exercice 4.9. Soit B une algèbre de Boole σ-complète. Une *sous-σ-algèbre* de B est, par définition, une sous-algèbre de Boole de B qui est stable par l'opération de borne supérieure dénombrable.

(a) Montrer que si A est une sous-σ-algèbre de B, alors A est elle-même une algèbre de Boole σ-complète.

(b) * On note traditionnellement $\beta\mathbb{N}$ l'espace de Stone de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (c'est donc l'espace des ultrafiltres sur $\mathbb{N}$). On pose $B = \mathfrak{P}(\beta\mathbb{N})$ (donc B est *complète*) et $A = \operatorname{Clop}(\beta\mathbb{N})$. Montrer que A est une algèbre de Boole complète (utiliser le Théorème 2.19). Montrer que cependant, A n'est pas une sous-σ-algèbre de B. (***Indication:*** pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \{n\}$ et soit φ l'isomorphisme naturel de $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sur A donné par le Théorème 2.19. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(a_n) \notin A$.)

(c) Montrer que pour tout espace topologique X, il existe une plus petite sous-σ-algèbre de X contenant l'ensemble des ouverts de X—on l'appelle la σ-algèbre

des *boréliens* de X. Supposons que tout singleton de X soit borélien qu'il existe une partie non borélienne de X; montrer que la σ-algèbre des boréliens de X n'est pas complète.

(d) Montrer que toute partie de $\mathbb{Q}$ est borélienne.

(e) * (demande des connaissances de théorie des ensembles) Montrer qu'il existe une partie non borélienne de $\mathbb{R}$. (***Indication:*** on obtient tous les boréliens en partant des intervalles ouverts, puis en prenant toutes les réunions dénombrables et complémentaires que l'on peut—ce processus prend ω_1 étapes. Montrer que l'on obtient ainsi $2^{\aleph_0}$ boréliens, et remarquer qu'il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ parties de $\mathbb{R}$. On peut même rendre cette preuve *constructive*, en construisant par récurrence transfinie une surjection "naturelle" d'une certaine partie de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$—l'ensemble des "codes boréliens"—sur l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$.)

Exercice 4.10 (Utilise le résultat de l'Exercice 4.8). Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole des parties λ-mesurables de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{N}$ l'idéal des parties de [λ-] mesure nulle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ est σ-saturée (on pourra exprimer $\mathbb{R}$ comme réunion dénombrable d'intervalles bornés). En déduire que $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ est complète (et pas seulement σ-complète!). Généraliser.

Exercice 4.11. Soit $(P, \leq)$ un ensemble *ordonné*, soit $e\colon P \to B$ sa complétion.

(a) Montrer que pour tous éléments p et q de P,
$$e(p) \leq e(q) \iff (\forall r \leq p)(r \mid q).$$

(b) Montrer que e est un plongement d'ensembles ordonnés (*i.e.*, $e(p) \leq e(q)$ si et seulement si $p \leq q$) si et seulement si il satisfait
$$(\forall p, q)\big(p \not\leq q \Rightarrow (\exists r \leq p)(r \perp q)\big)$$
—on dit que $(P, \leq)$ est *séparatif*.

(c) Soit S un ensemble ayant au moins deux éléments; montrer que l'ensemble des suites finies d'éléments de S, muni de l'inclusion inverse (*i.e.*, $p \leq q$ si et seulement si le domaine de q est un segment initial du domaine de p et la restriction de p au domaine de q est égale à q) est séparatif.

(d) On pose $p \Vdash q$ (se lit "p force q") si et seulement si $e(p) \leq e(q)$, et $p \sim q$ si et seulement si $p \Vdash q$ et $q \Vdash p$. Montrer que $\Vdash$ est une relation de préordre sur P, que $\sim$ est une relation d'équivalence sur P et que l'ensemble ordonné quotient $(P, \Vdash)/\sim$ est séparatif (on l'appelle naturellement le *quotient séparatif* de P).

(e) Supposons en outre que P est *filtrant décroissant*, *i.e.*, pour tous p et q dans P, il existe r dans P tel que $r \leq p$ et $r \leq q$. Montrer que $e(p) = e(q)$ pour tous p et q dans P. En particulier, si $(P, \leq)$ est totalement ordonné et non réduit à un point, on obtient que e n'est pas injective.

Exercice 4.12.

(a) Soit B une algèbre de Boole et soit X une partie coinitiale de $B \setminus \{0\}$. Montrer que la borne supérieure de X dans B est égale à 1_B (on pourra raisonner par l'absurde).

(b) Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné, soit $e\colon P \to B$ sa complétion. Montrer que la borne supérieure de l'image de e dans B est égale à 1_B.

Exercice 4.13. * Munissons $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0, 1\}$ (on dira sa "topologie naturelle"); cette topologie est donc *compacte*. Soit B l'algèbre de Boole complète des ouverts réguliers de X. Soit

maintenant P l'ensemble des *fonctions* $p\colon n \to \{0,1\}$ (où l'on identifie comme d'habitude n à $\{0,1,\dots,n-1\}$) où n décrit $\mathbb{N}$ (*i.e.*, $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}^n$), ordonné par inclusion inverse (on pose donc $p \le q \Leftrightarrow q \subseteq p$). Soit enfin $e\colon P \to B$ définie par

$$(\forall p \in P)\big(e(p) = \{x \in X \mid p \subset x\}\big).$$

Montrer que (e, B) est une complétion de $(P, \supseteq)$.

Exercice 4.14. * Soit B une algèbre de Boole σ-complète, soit f un automorphisme de B et soit p un ultrafiltre de B. On considère les trois conditions suivantes:

(i) $f[p] = p$;
(ii) $(\forall a \in p)\left(\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} f^n(a) \in p\right)$;
(iii) $(\forall a \in p)(\exists b \in p)(b \le a$ et $f(b) = b)$.

Le but de cet exercice est de montrer que (i), (ii), et (iii) sont équivalentes.

(a) Montrer que (ii) implique (iii) et que (iii) implique (i).

Le reste de l'exercice est consacré à montrer que (i) implique (ii). Supposons donc que (i) ait lieu, *i.e.*, $f[p] = p$. Pour tous x, y dans B, on pose $x \setminus y = x \wedge \neg y$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \bigwedge_{k=0}^{n} f^k(a)$. Puis soient b, c, et d définis respectivement par

$$b = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (a_{2n} \setminus a_{2n+1}),$$
$$c = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (a_{2n+1} \setminus a_{2n+2}),$$
$$d = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f^n(a).$$

(b) Montrer que tous les a_n appartiennent à p.
(c) Montrer que $a = b \vee c \vee d$, et que $b \wedge c = b \wedge d = c \wedge d = 0$.
(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $f(a_n \setminus a_{n+1}) \ge a_{n+1} \setminus a_{n+2}$ est satisfaite.
(e) En déduire que $f(b) \ge c$ et $f(c) \vee (a_0 \setminus a_1) \ge b$.
(f) En déduire que $b \in p$ si et seulement si $c \in p$. En utilisant (c), en déduire que $d \in p$.
(g) Conclure que (ii) est satisfaite.

Exercice 4.15. Soit B une algèbre de Boole complète et soit f un automorphisme de B.

(a) Montrer que f préserve les infs et sups infinis.
(b) En déduire, en utilisant le Lemme de Zorn, que $\{x \in B \mid f(x) \wedge x = 0\}$ admet un élément maximal.

Exercice 4.16 (Suppose connus les résultats des Exercices 4.14 et 4.15). * Soit B une algèbre de Boole complète, soit f un automorphisme de B et soit p un ultrafiltre de B tel que $f[p] = p$. On se propose de montrer qu'il existe un élément c de p tel que $(\forall x \le c)(f(x) = x)$. On se fixe un élément a de B qui soit maximal dans $\{x \in B \mid f(x) \wedge x = 0\}$ (donné par l'Exercice 4.15). Soit $b = \neg(a \vee f(a))$.

(a) Montrer que $b \in p$.
(b) En déduire, en utilisant l'Exercice 4.15 qu'il existe $c \in p$ tel que $c \le b$ et $f(c) = c$.

(c) Supposons qu'il existe $x \leq c$ tel que $f(x) \neq x$. Soit $d = f(x) \setminus x$ si $f(x) \not\leq x$, $d = x \setminus f(x)$ sinon. Montrer que $d \neq 0$, $d \leq c$, et $f(d) \wedge d = 0$.
(d) En déduire, en considérant $a \vee d$, une contradiction. Conclure.
(e) En déduire le résultat de l'Exercice 1.31.
(f) En déduire que *si X est l'espace de Stone d'une algèbre de Boole complète* (on dit que X est un espace compact "extrêmement discontinu"), *alors l'ensemble des points fixes de tout homéomorphisme de X sur lui-même est un ouvert-fermé de X.*

Exercice 4.17. Montrer que toute algèbre de Boole complète est isomorphe à sa complétion.

Exercice 4.18. Soit E une algèbre de Boole. On dit que E satisfait la *condition d'interpolation dénombrable* quand pour toutes parties dénombrables X et Y de E telles que $X \leq Y$, il existe $z \in E$ tel que $X \leq z \leq Y$.

(a) Montrer que toute algèbre de Boole σ-complète a la propriété d'interpolation dénombrable.
(b) Montrer que E a la condition d'interpolation dénombrable si et seulement si pour toute sous-algèbre de Boole d'une algèbre de Boole *dénombrable* B, tout homomorphisme de A vers E se prolonge en un homomorphisme de B vers E (on dit que E est "dénombrablement injective").
(c) * Soit $\mathcal{F}$ le *filtre de Fréchet* sur $\mathbb{N}$, *i.e.*,
$$\mathcal{F} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\mathbb{N} \setminus n \subseteq X)\}.$$
Montrer que $\mathfrak{P}(\mathbb{N})/\mathcal{F}$ (que l'on note souvent $\mathfrak{P}(\mathbb{N})/fin$) a la propriété d'interpolation dénombrable.
(d) Montrer que $\mathfrak{P}(\mathbb{N})/fin$ n'est pas σ-complète. (***Indication:*** montrer qu'il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties infinies mutuellement disjointes de $\mathbb{N}$, et que l'image d'une telle suite dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})/fin$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})/fin$).
(e) Montrer qu'il existe une famille $(U_z)_{z\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ de parties *infinies* de $\mathbb{N}$ qui soit *presque disjointe*, *i.e.*, pour tous z et z' dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tels que $z \neq z'$, $U_z \cap U_{z'}$ est *fini*. (On pourra considérer, pour tout $z \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $A_z = \{z\restriction_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, puis se ramener à $\mathbb{N}$ au moyen d'une bijection de l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{0,1\}$ sur $\mathbb{N}$).
(f) En déduire que $\mathfrak{P}(\mathbb{N})/fin$ n'est *pas* σ-saturée (voir la définition dans l'Exercice 4.8(c)) (noter que $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ est, elle, σ-saturée).

Exercice 4.19. Soit X un espace topologique. On dit que X est *extrêmement discontinu* quand l'adhérence de tout ouvert de X est un ouvert de X. Montrer que X est l'espace de Stone d'une algèbre de Boole complète si et seulement si il est compact et extrêmement discontinu.

Exercice 4.20. Soit I un ensemble indénombrable. Montrer que l'ensemble B des parties X de I telles que soit X soit $I \setminus X$ est dénombrable est une sous-σ-algèbre de $\mathfrak{P}(I)$ (*voir* l'Exercice 4.9); mais que cependant, B n'est pas une algèbre de Boole complète.

CHAPITRE 5

Propriété de raffinement. Semi-groupes, monoïdes et groupes ordonnés

Tout d'abord, un rappel de terminologie qui semble en troubler plus d'un!

DÉFINITION.

(a) Un *semi-groupe* est un couple $(S, \cdot)$ tel que S est un ensemble non vide et $\cdot$ est une loi de composition interne associative sur S

(b) Un *monoïde* est un semi-groupe avec élément neutre, *i.e.*, un triplet $(S, \cdot, 1)$ tel que S est un ensemble non vide, $\cdot$ est une loi de composition interne associative sur S, et 1 est un élément neutre pour $\cdot$ (il est nécessairement unique).

Dans le contexte ci-dessus, le semi-groupe S est *simplifiable* quand il satisfait l'énoncé

$$(\forall x, y, z)\big((x \cdot z = y \cdot z \text{ ou } z \cdot x = z \cdot y) \Rightarrow x = y\big).$$

Nous utiliserons essentiellement deux notations possibles pour les semi-groupes: la notation *multiplicative* $(\cdot, 1)$ ci-dessus, et aussi la notation *additive* $(+, 0)$ souvent plus parlante. Bien que la notation additive soit traditionnellement réservée au cas commutatif, nous nous permettrons parfois de l'utiliser dans le cas non commutatif; il existe des précédents, *voir* par exemple la notation additive pour l'addition (non commutative) des *ordinaux* $(1 + \omega = \omega \neq \omega + 1)$.

Maintenant, l'extension naturelle de ces définitions au cas ordonné:

DÉFINITION. Un *semi-groupe préordonné* est une structure $(S, \cdot, \leq)$ telle que $(S, \cdot)$ est un semi-groupe et $\leq$ est un préordre [*i.e.*, une relation binaire réflexive et transitive] sur S qui est *compatible avec* $\cdot$, *i.e.*,

$$(\forall x, y, z \in S)\big(x \leq y \Rightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z \text{ et } z \cdot x \leq z \cdot y)\big).$$

Lorsque seule l'implication plus faible $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ (resp., $x \leq y \Rightarrow z \cdot x \leq z \cdot y$) est satisfaite, alors on parle seulement de *compatibilité à droite* (resp., *compatibilité à gauche*) de $\leq$ avec $\cdot$. Cependant, nous ne serons pas par la suite concernés par cet affaiblissement.

EXEMPLE 5.1. Soit S un semi-groupe quelconque. Alors S est *trivialement ordonné* par la relation d'égalité: $x \leq y$ si et seulement si $x = y$, et S est *grossièrement préordonné* par la relation d'équivalence grossière $S \times S$ (*i.e.*, $\leq_{\text{GRO}}$ définie par $x \leq_{\text{GRO}} y$ pour tous x et y).

DÉFINITION. Un *monoïde préordonné* (resp., un *groupe préordonné*) est un monoïde (resp., un groupe) muni d'une relation de préordre compatible avec la loi du monoïde (resp., du groupe).

Le plus souvent, nous considérerons des structures *ordonnées* et pas seulement préordonnées—cependant, ces dernières réussissent à s'infiltrer partout et il ne sera pas possible de les éviter indéfiniment...

EXEMPLE 5.2. Soit $(M, +, 0, \leq)$ un *sup-demi-treillis avec* 0, *i.e.*, (*voir* le Chapitre 2) un monoïde commutatif dans lequel tout élément est idempotent et muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par $x \leq y$ si et seulement si $x + y = y$. Alors $(M, +, 0, \leq)$ est un monoïde [commutatif] ordonné.

On obtient immédiatement la proposition suivante:

PROPOSITION 5.3. *Tout semi-groupe préordonné satisfait l'énoncé*

$$(\forall x, x', y, y')\big((x \leq x' \text{ et } y \leq y') \Rightarrow x \cdot y \leq x' \cdot y'\big).$$

PREUVE. $x \cdot y \leq x \cdot y' \leq x' \cdot y'$. □

Passons maintenant à une notation bien commode que nous utiliserons très souvent par la suite.

DÉFINITION. Soit S un semi-groupe, noté additivement, soient m et n deux entiers naturels non nuls, soient $a_0, \ldots, a_{m-1}$, $b_0, \ldots, b_{n-1}$ et c_{ij} $(i < m,\ j < n)$ des éléments de S. Nous dirons que le tableau suivant:

	b_0	b_1	$\cdots$	b_{n-1}
a_0	c_{00}	c_{01}	$\cdots$	$c_{0,n-1}$
a_1	c_{10}	c_{11}	$\cdots$	$c_{1,n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{m-1}	$c_{m-1,0}$	$c_{m-1,1}$	$\cdots$	$c_{m-1,n-1}$

(5.1)

est une *matrice de raffinement* quand

$$(\forall i < m)\left(a_i = \sum_{j<n} c_{ij}\right)$$
$$(\forall j < n)\left(b_j = \sum_{i<m} c_{ij}\right).$$

Ici, $\sum_{i<m} a_i$ est l'élément $a_0 + a_1 + \cdots + a_{m-1}$ (dans cet ordre). Dans le contexte ci-dessus, on dira parfois que $(c_{ij})_{i<m;\ j<n}$ est un *raffinement* de $(a_i)_{i<m}$ et $(b_j)_{j<n}$.

Il est à noter que si le tableau (5.1) est une matrice de raffinement ***et*** S ***est commutatif***, alors $\sum_{i<m} a_i = \sum_{j<n} b_j$. Évidemment, sans la commutativité de S, on ne peut arriver à cette conclusion, puisque si S admet un élément neutre 0 et a et b sont des éléments quelconques de S, alors le tableau

	b	a
a	0	a
b	b	0

est une matrice de raffinement, alors que dans le cas non commutatif, on n'a pas en général $a + b = b + a$...

La définition associée à cette notation est, dans le cas commutatif, classique et extrêmement importante. On peut très laconiquement et sans trop d'exagération résumer sa portée en disant que c'est l'analogue dans un cadre très général de la décomposition en facteurs premiers en théorie des nombres. Nous l'appellerons ici la *propriété de raffinement*, mais elle porte d'autres noms (suivant les auteurs), comme "propriété de décomposition de Riesz" (qui désignera cependant ici une autre propriété apparentée) ou "propriété d'interpolation de Riesz".

Définition. La *propriété de raffinement* est l'énoncé suivant:

$$(\forall a_0, a_1, b_0, b_1)\left(a_0 + a_1 = b_0 + b_1 \Rightarrow (\exists_{i,j<2} c_{ij}) \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i<2} (a_i = c_{i0} + c_{i1} \text{ et } b_i = c_{0i} + c_{1i})\right).$$

(la notation $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$ est conçue pour distinguer la quantification universelle sur les éléments de la structure, à savoir $\forall$, de celle sur des éléments extérieurs à la structure, comme par exemple les entiers; ainsi, $\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i<2} \varphi(i)$ signifie $(\varphi(0)$ et $\varphi(1))$; on utilise la notation duale $\bigvee\!\!\!\bigvee$ pour la quantification existentielle).

Cela signifie donc que si $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$, alors l'on peut former une matrice de raffinement comme suit:

	b_0	b_1
a_0	c_{00}	c_{01}
a_1	c_{10}	c_{11}

Il est à noter une fois de plus que sans la commutativité, l'hypothèse $(\forall i < 2)(a_i = c_{i0} + c_{i1}$ et $b_i = c_{0i} + c_{1i})$ n'entraîne pas en général que $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$. Cela conduit à vouloir renforcer cette définition, en imposant par exemple que $c_{01} + c_{10} = c_{10} + c_{01}$. Bien que cette modification paraisse pertinente—les semi-groupes non commutatifs "usuels" satisfaisant l'ancienne définition satisfont aussi la nouvelle, et des constructions algébriques plus profondes semblent ne vouloir se généraliser au cas non commutatif qu'avec la nouvelle définition—nous n'allons pas beaucoup insister dessus, la première définition suffisant amplement à nos besoins ici.

Par ailleurs, la proposition suivante montre que la propriété de raffinement se généralise naturellement aux sommes de nombres finis arbitraires d'éléments.

Proposition 5.4. *Soit S un semi-groupe, noté additivement, satisfaisant la propriété de raffinement. Alors toutes suites finies $(a_i)_{i<m}$ et $(b_j)_{j<n}$ d'éléments de S telles que $\sum_{i<m} a_i = \sum_{j<n} b_j$ admettent un raffinement.*

Preuve. Par récurrence sur $m + n$. Tout d'abord, c'est trivial pour $m = 1$ ou $n = 1$. Supposons donc la proposition vérifiée pour toutes les valeurs de (m', n') telles que $m' + n' < m + n$, avec $m \geq 2$ et $n \geq 2$. Si $m = 2$ ou $n = 2$ alors la proposition est par hypothèse vérifiée, puisque S satisfait la propriété de raffinement. Supposons donc que $m \geq 3$ ou $n \geq 3$; sans perte de généralité, $m \geq 3$. Soient $(a_i)_{i<m}$ et $(b_j)_{j<n}$ deux suites d'éléments de S telles que $\sum_{i<m} a_i = \sum_{j<n} b_j$. Écrivons ceci sous la forme

$$a_0 + \sum_{1 \leq i < m} a_i = \sum_{j<n} b_j.$$

Puisque $2+n < m+n$ et par hypothèse de récurrence, il existe des éléments c_{0j} et d_j $(j < n)$ de S tels que le tableau suivant soit une matrice de raffinement:

	b_0	b_1	$\dots$	b_{n-1}
a_0	c_{00}	c_{01}	$\dots$	$c_{0,n-1}$
$\sum_{1\le i<m} a_i$	d_0	d_1	$\dots$	d_{n-1}

Par suite, $\sum_{1\le i<m} a_i = \sum_{j<n} d_j$. Puisque $(m-1)+n < m+n$, il existe par hypothèse de récurrence des éléments c_{ij} $(1 \le i < m$ et $j < n)$ tels que le tableau suivant soit une matrice de raffinement:

	d_0	d_1	$\dots$	d_{n-1}
a_1	c_{10}	c_{11}	$\dots$	$c_{1,n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{m-1}	$c_{m-1,0}$	$c_{m-1,1}$	$\dots$	$c_{m-1,n-1}$

Il s'ensuit facilement que le tableau suivant est une matrice de raffinement:

	b_0	b_1	$\dots$	b_{n-1}
a_0	c_{00}	c_{01}	$\dots$	$c_{0,n-1}$
a_1	c_{10}	c_{11}	$\dots$	$c_{1,n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_{m-1}	$c_{m-1,0}$	$c_{m-1,1}$	$\dots$	$c_{m-1,n-1}$

et la proposition est démontrée. □

Nous omettrons la preuve, évidente, du lemme suivant:

LEMME 5.5. *Soit $(M,+,0)$ un monoïde. On définit une relation binaire $\le_{\text{alg}}$ sur M en posant*

$$x \le_{\text{alg}} y \iff (\exists u,v)(y = u + x + v).$$

Alors $\le_{\text{alg}}$ est une relation de préordre sur M.

Notons que $\le_{\text{alg}}$ n'est pas toujours une relation d'ordre (par exemple quand M est un *groupe* non trivial). Elle n'est pas non plus toujours compatible avec l'addition de M (par exemple, si M est le monoïde libre sur l'alphabet à deux lettres $\{a,b\}$, alors $a <_{\text{alg}} bab$ dans M, mais $aa \not\le_{\text{alg}} baba$). *Cependant, dans le cas où M est commutatif, $\le_{\text{alg}}$ est trivialement compatible avec l'addition.* Ce n'est pas le seul cas possible de compatibilité, comme par exemple quand M est le cône positif d'un groupe préordonné (*voir* plus loin).

LEMME 5.6 (Propriété de décomposition de Riesz). *Soit $(M,+,0)$ un monoïde satisfaisant la propriété de raffinement. Alors pour tout entier naturel non nul n et tous b, $a_0,\dots,a_{n-1}$ dans M, si $b \le_{\text{alg}} \sum_{i<n} a_i$, alors il existe $b_i \le_{\text{alg}} a_i$ $(i<n)$ dans M tels que $b = \sum_{i<n} b_i$.*

PREUVE. Par hypothèse, il existe u et v dans M tels que $u+b+v=\sum_{i<n} a_i$. Puisque M satisfait la propriété de raffinement, on peut former une matrice de raffinement

	a_0	a_1	$\dots$	a_{n-1}
u	u_0	u_1	$\dots$	u_{n-1}
b	b_0	b_1	$\dots$	b_{n-1}
v	v_0	v_1	$\dots$	v_{n-1}

avec les b_i, u_i, v_i $(i<n)$ dans M. Pour tout $i<n$, l'égalité $a_i=u_i+b_i+v_i$ est satisfaite, donc $b_i \leq_{\text{alg}} a_i$. De plus, $b=\sum_{i<n} b_i$. □

La propriété de raffinement a une grande importance et nous y reviendrons plus longuement dans des chapitres ultérieurs. Pour l'instant, nous allons nous concentrer sur les groupes (pré)ordonnés. *Nous noterons ceux-ci additivement.* Une remarque s'impose immédiatement: *un groupe ordonné non trivial ne peut avoir de plus grand ni de plus petit élément.* En effet, si G est un groupe ordonné et si g est le plus grand élément de G, alors pour tout $x \in G$, $x+g \leq g$, d'où $x \leq 0$; de même, $-x \leq 0$, donc $x=0$ et par suite, G est trivial. De même quand G admet un plus petit élément.

DÉFINITION. Soit G un groupe préordonné. Le *cône positif* de G est, par définition,

$$G^+ = \{x \in G \mid 0 \leq x\}.$$

Un *sous-groupe préordonné de* G est un sous-groupe H de G, muni du cône positif $H^+ = H \cap G^+$.

PROPOSITION 5.7. *Soit G un groupe ordonné. Alors le cône positif de G est un sous-monoïde de $(G,+,0)$, et il satisfait*

$$G^+ + G^+ \subseteq G^+,$$
$$(\forall x \in G)(x + G^+ - x \subseteq G^+),$$
$$G^+ \cap (-G^+) = \{0\}.$$

PREUVE. Pour tous x et y dans G^+, les inégalités $0 \leq x$ et $0 \leq y$ sont satisfaites, donc $0 \leq x+y$ par la Proposition 5.3; donc $G^+ + G^+ \subseteq G^+$. Puisque $0 \in G^+$, G^+ est un sous-monoïde de $(G,+,0)$. Maintenant, si $g \in G^+$ et $x \in G$, alors $x+g \geq x+0=x$, d'où $x+g-x \geq x-x=0$, *i.e.*, $x+g-x \in G^+$. Enfin, la troisième propriété est une traduction immédiate de l'antisymétrie de $\leq$. □

La propriété $(\forall x \in G)(x+G^+-x \subseteq G^+)$ se lit évidemment "G^+ est distingué (ou "normal") dans G". Il est évident que si l'on remplace "ordonné" par "préordonné" dans l'énoncé de la Proposition 5.7, alors G^+ est encore un sous-monoïde distingué de $(G,+,0)$, mais il ne satisfait $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$ que si $\leq$ est une relation d'ordre. Il résulte en particulier de tout cela que si G est un groupe préordonné, alors le préordre algébrique sur G^+ (*voir* Lemme 5.5) est la restriction à G^+ du préordre de G, et en fait, pour tous x et y dans G^+, $x \leq y$ si et seulement si $x \leq_{\text{alg}} y$, si et seulement si $-x+y$ (resp., $y-x$) appartient à G^+.

Réciproquement, on montre la proposition suivante:

PROPOSITION 5.8. *Soit G un groupe et soit P un sous-monoïde distingué de G tel que $P \cap (-P) = \{0\}$. Alors il existe une seule structure de groupe ordonné sur G de cône positif P.*

PREUVE. Si $\leq$ est un ordre de groupe ordonné sur G de cône positif P, alors pour tous x et y dans G, $x \leq y$ si et seulement si $-x+x \leq -x+y$, si et seulement si $-x+y \in P$, d'où l'unicité. En ce qui concerne l'existence, il s'agit en fait de montrer que la relation binaire $\leq$ définie sur G par $x \leq y$ si et seulement si $-x+y \in P$ est une relation d'ordre compatible avec $+$. Le fait que $\leq$ est une relation d'ordre est une vérification très facile. Soient maintenant x, y, et z dans G tels que $x \leq y$. Cela signifie que $-x+y \in P$, d'où $-(z+x)+(z+y) = -x-z+z+y = -x+y \in P$, donc $z+x \leq z+y$; par ailleurs, $-(x+z)+(y+z) = -z-x+y+z$ appartient à P car $-x+y \in P$ et P est une partie distinguée de G; d'où la compatibilité. □

EXEMPLE FONDAMENTAL. *Soit $(T, \leq)$ un ensemble ordonné quelconque. On munit l'ensemble* $\operatorname{Aut} T$ *des* automorphismes *de $(T, \leq)$ de sa structure de* groupe *(avec la composition des applications), et on note*

$$\mathbf{P} = \{f \in \operatorname{Aut} T \mid (\forall x \in T)(f(x) \geq x)\}.$$

Il est alors facile de vérifier que $\mathbf{P}$ est un sous-monoïde distingué de $(\operatorname{Aut} T, \circ, \mathrm{id}_T)$ *et que $\mathbf{P} \cap (-\mathbf{P}) = \{\mathrm{id}_T\}$ (*Note: *pour tout $f \in \operatorname{Aut} T$, $-f$ est en fait f^{-1}). Par suite, $\mathbf{P}$ est le cône positif d'un ordre de groupe sur* $\operatorname{Aut} T$.

La relation d'ordre sur $\operatorname{Aut} T$ *peut être définie par la formule suivante:*

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall x \in T)(f(x) \leq g(x)).$$

L'analogue suivant du Théorème de Cayley pour les groupes ("tout groupe est isomorphe à un groupe de permutations"—un groupe de permutations est, par définition, un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_X$ des permutations de X pour un certain ensemble X) a alors lieu:

PROPOSITION 5.9. *Pour tout groupe ordonné G, il existe un ensemble ordonné T tel que G se plonge dans* $\operatorname{Aut} T$.

PREUVE. Prenons simplement $T = G$, muni de la même relation d'ordre $\leq$. Pour tout $g \in G$, on peut définir un automorphisme de T par $\tau(g)\colon x \mapsto g + x$, ce qui définit donc une application τ de G vers $\operatorname{Aut} T$. De plus, pour tous g et g' dans G, $\tau(g+g') = \tau(g) \circ \tau(g')$, et $\tau(0) = \mathrm{id}_T$. Par suite, τ est un homomorphisme de groupes de G vers $\operatorname{Aut} T$. Il est clair que $g \geq 0$ entraîne que $\tau(g) \geq \mathrm{id}_T$. Il est également clair que τ est injectif (si $\tau(g) = \mathrm{id}_T$, alors $g = \tau(g)(0) = \mathrm{id}_T(0) = 0$), mais ceci n'est pas suffisant pour que τ soit un *plongement* de groupes ordonnés: en fait, il s'agit de vérifier que $\tau(g) \geq \mathrm{id}_T$ entraîne $g \geq 0$. Mais c'est immédiat: si $\tau(g) \geq \mathrm{id}_T$, alors $g = \tau(g)(0) \geq \mathrm{id}_T(0) = 0$. □

Le problème de savoir quels monoïdes apparaissent comme cônes positifs de groupes ordonnés (en-dehors de tout groupe ambiant) a une solution facile à énoncer, mais de preuve un peu plus délicate:

PROPOSITION 5.10. *Soit P un monoïde (non nécessairement commutatif). Alors P est le cône positif d'un groupe ordonné si et seulement si il satisfait les conditions suivantes:*

(i) *P est simplifiable;*
(ii) *P est* conique, i.e., *il satisfait l'énoncé* $(\forall x, y)(x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0)$*;*

(iii) *Pour tout* $a \in P$, $a + P = P + a$.

PREUVE. Le problème essentiel est de plonger P dans un groupe. On sait que, puisque P est simplifiable, c'est possible dans le cas commutatif (et c'est même classique!), mais dans le cas non commutatif, il existe des monoïdes simplifiables qui ne se plongent dans aucun groupe (*voir* [**Jaco**])! Heureusement, il existe des conditions suffisantes simples sous lesquelles cela reste possible. L'une d'entre elles est la *condition d'Ore* (à droite), à savoir $(\forall a, b)(\exists u, v)(a + u = b + v)$ (*voir* l'Exercice 5.15 pour les détails là-dessus). Alors P satisfait la condition d'Ore: en effet, en prenant $v = a$, $b + v = b + a \in P + a = a + P$ et il existe donc $u \in P$ tel que $a + u = b + v$. Par suite, P se plonge dans un groupe G; sans perte de généralité, on peut supposer que P engendre G (comme groupe). Alors P est un sous-monoïde de G. Pour tout $x \in P \cap (-P)$, x et $y = -x$ appartiennent à P et $x + y = 0$, donc, puisque P est conique, $x = 0$ et donc $P \cap (-P) = \{0\}$. Enfin, il est facile de vérifier que le "centralisateur" $C = \{x \in G \mid x + P = P + x\}$ est un sous-groupe de G; il contient P par hypothèse, donc il contient G (car G est le groupe engendré par P); par suite, P est une partie distinguée de G. □

Comme, malgré tout, nous nous concentrerons plutôt sur le cas commutatif, nous renvoyons, comme dit plus haut, à l'Exercice 5.15 pour la suffisance de la condition d'Ore au plongement dans un groupe.

Dans le cas commutatif, une notion importante et plus restrictive que celle de groupe (pré)ordonné est celle d'*espace vectoriel (pré)ordonné*.

DÉFINITION. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un *cône convexe* de E est un sous-monoïde P de E tel que $\mathbb{R}^+P \subseteq P$ (*i.e.*, $(\forall \lambda \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in P)(\lambda x \in P)$). Un préordre $\leq$ sur E munit E d'une structure d'*espace vectoriel préordonné* quand $\leq$ est compatible avec l'addition et le cône positif de $\leq$ est un cône convexe.

Par suite, un espace vectoriel préordonné E est un espace vectoriel ordonné si et seulement si $E^+ \cap (-E^+) = \{0\}$. *Voir* les Exercices de 5.16 à 5.18 à ce propos.

NOTATION. Soit G un groupe préordonné. On note $G^\pm$ le sous-groupe de G engendré par G^+.

DÉFINITION. Un ensemble préordonné est *dirigé* (on dit aussi *filtrant*) quand il satisfait l'énoncé

$$(\forall x, y)(\exists z)(x \leq z \text{ et } y \leq z).$$

PROPOSITION 5.11. *Soit G un groupe préordonné. Alors $G^\pm = G^+ + (-G^+) = (-G^+) + G^+$, et G est dirigé si et seulement si $G^\pm = G$.*

PREUVE. Soit $H = G^+ + (-G^+)$. Tout élément de H s'écrit $z = x - y$, où x et y appartiennent à G^+, et alors $-z = y - x \in H$. Si $z = x - y$ et $z' = x' - y'$ $(x, x', y, y' \in G^+)$, alors $z + z' = x - y + x' - y' = (x - y + x' + y) - y - y' = (x + (-y + x' + y)) - (y' + y)$ appartient à H, car x, $-y + x' + y$, y, y' appartiennent à G^+. Par suite, H est un sous-groupe de G. Il contient G^+, donc $G^\pm$. Mais $H \subseteq G^\pm$ de façon évidente, d'où finalement $H = G^\pm$. Une preuve similaire montre que $(-G^+) + G^+ = G^\pm$.

Supposons maintenant que G soit dirigé. Alors pour tout $z \in G$, il existe $x \in G$ tel que $0, z \leq x$; soit alors $y = -z + x$, alors $y \in G^+$ et $z = x - y$. Puisque x, $y \in G^+$, z appartient à $G^\pm$: ainsi, $G^\pm = G$. Réciproquement, supposons que $G^\pm = G$. Pour tout $z \in G$, z appartient à $G^\pm$ et donc, par la première partie de la

preuve, $z \in G^+ + (-G^+)$, et il existe donc x et y dans G^+ tels que $z = x - y$. Par suite, $0, z \leq x$; de façon générale, pour tous a et b dans G, il existe donc $c \in G^+$ tel que $0, -a + b \leq c$; par suite, $a, b \leq a + c$, donc G est dirigé. $\square$

Notons au passage que G est dirigé si et seulement si il satisfait l'énoncé

$$(\forall x)(\exists y)(0, x \leq y).$$

Voir aussi l'Exercice 5.19 à ce sujet.

Quelques concepts utiles de plus pour les groupes ordonnés:

NOTATION. Soit G un groupe ordonné. Si a et b sont deux éléments de G, nous noterons $a \ll b$ l'énoncé suivant:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(na \leq b).$$

Notons que $a \ll b$ entraîne $b \geq 0$.

DÉFINITION. Soit G un groupe ordonné. Alors G est *archimédien* quand

$$(\forall a, b \in G)(a \ll b \Rightarrow a = 0).$$

Une définition (strictement) plus forte est la suivante:

DÉFINITION. Un groupe ordonné G est *intégralement clos* quand pour tous a et b dans G,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(na \leq b) \Rightarrow a \leq 0.$$

Il est trivial que tout groupe ordonné intégralement clos est archimédien, mais la réciproque est fausse, même dans le cas commutatif. Nous verrons plus tard qu'un groupe dirigé intégralement clos est toujours commutatif—c'est un Théorème tout à fait non trivial! Ce n'est pas le cas pour les groupes archimédiens. Dans certaines références, on dit carrément "archimédien" au lieu de "intégralement clos" et ces deux termes n'ont donc pas une signification universelle.

DÉFINITION. Soit m un entier naturel non nul. Un semi-groupe ordonné est *non m-perforé* quand il satisfait l'énoncé

$$(\forall x, y)(mx \leq my \Rightarrow x \leq y).$$

Un semi-groupe ordonné est *perforé*, quand il est m-perforé pour un certain $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *non perforé* quand il n'est pas perforé.

Ainsi, un semi-groupe ordonné est non-perforé quand il satisfait l'énoncé

$$(\forall x, y)(mx \leq my \Rightarrow x \leq y),$$

pour tout entier naturel non nul m.

Dans certaines références, on dit (pour les groupes commutatifs ordonnés) "isolé" ou même "réticulable" au lieu de "non perforé". Je préfère cependant ce dernier terme (*voir* exemple suivant).

Dans le cas commutatif, la m-perforation est équivalente à $(\forall x)(mx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$; dans le cas non-commutatif, il n'y a pas toujours équivalence et en fait, l'absence ou non de perforation revêt un caractère plus anecdotique. Dans le cas général, il est facile de vérifier que la non perforation entraîne l'absence de torsion, mais la réciproque est fausse, même dans le cas commutatif:

EXEMPLE 5.12. Soit $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Il est facile de vérifier que P est le cône positif d'une structure de groupe ordonné dirigé sur $\mathbb{Z}$. Cependant, ce groupe est 2-perforé (par exemple, $2 \cdot 2 \leq 2 \cdot 3$ mais $2 \not\leq 3$), archimédien, mais non intégralement clos. La représentation "géométrique" montre alors une bonne raison d'utiliser le terme étrange de "perforation"!

L'analogue pour les groupes ordonnés de la notion de sous-groupe distingué est celle de sous-groupe *convexe* distingué:

DÉFINITION. Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné. Une partie C de P est *convexe* quand pour tous $a \leq b$ dans C, l'"intervalle"

$$[a,\, b] = \{x \in P \mid a \leq x \leq b\}$$

est inclus dans C.

PROPOSITION 5.13. *Soit G un groupe ordonné et soit N un sous-groupe distingué convexe de G. Alors le groupe quotient G/N peut être muni d'une structure de groupe ordonné, de cône positif $\{x + N \mid x \in G^+\}$.*

PREUVE. Soit $P = \{x + N \mid x \in G^+\}$. Il est immédiat que P est un sous-monoïde de G/N et que P est une partie distinguée de G/N (on utilise le fait que G^+ est une partie distinguée de G). Si $\xi \in P \cap (-P)$, alors il existe x et y dans G^+ tels que $\xi = x + N = -y + N$, d'où $x + y + N = N$, *i.e.*, $x + y \in N$. Mais $0 \in N$, et, puisque $y \geq 0$, $0 \leq x \leq x + y$; par suite, $x \in N$ donc $\xi = 0$ (dans G/N): ainsi, $P \cap (-P) = \{0\}$ et donc finalement, P est le cône positif d'un ordre de groupe sur G/N. □

Les sous-groupes distingués convexes correspondent exactement aux *homomorphismes de groupes ordonnés* (*i.e.*, les homomorphismes *croissants* de groupes). Nous omettons la preuve, triviale, du résultat suivant:

PROPOSITION 5.14. *Soit $f\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes ordonnés. Alors* $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-groupe distingué convexe de G. Réciproquement, si N est un sous-groupe distingué convexe de G, alors la projection naturelle $G \to G/N$ est un homomorphisme surjectif de groupes ordonnés.*

Notons que l'analogue du "premier Théorème d'isomorphisme" pour les groupes n'a pas lieu pour les groupes ordonnés: en particulier, un homomorphisme bijectif de groupes ordonnés n'est pas forcément un isomorphisme de groupes ordonnés. Par exemple, soit G le groupe $\mathbb{Z}$ muni du cône positif $\mathbb{N} \setminus \{1\}$. Alors l'identité est un homomorphisme bijectif de G sur $\mathbb{Z}$, mais sa réciproque n'est pas croissante.

Par contre, la notion importante de *produit lexicographique* n'a pas d'analogue dans les groupes non ordonnés:

PROPOSITION 5.15. *Soient G et H deux groupes ordonnés. Alors il existe une seule structure de groupe ordonné sur $G \times H$ dont le cône positif est*

$$P = \{(x, y) \in G \times H \mid x > 0_G \text{ ou } (x = 0_G \text{ et } y \geq 0_H)\}.$$

PREUVE. Il suffit de montrer que P est un sous-monoïde distingué de $G \times H$ tel que $P \cap (-P) = \{(0, 0)\}$. C'est un exercice facile. □

Nous noterons $G \times_{\text{lex}} H$ le groupe ordonné ainsi défini. Notons que $G \times_{\text{lex}} H$ n'est archimédien que dans les cas triviaux—en l'occurrence, quand l'un des deux

groupes ordonnés G ou H est trivial et l'autre archimédien. Par ailleurs, il est facile de vérifier que si G et H sont tous deux *totalement ordonnés*, alors $G \times_{\text{lex}} H$ est également totalement ordonné.

Le produit lexicographique est un cas particulier d' *extension lexicographique* comme défini ci-dessous:

PROPOSITION 5.16. *Soit N un sous-groupe distingué d'un groupe G. On suppose que N et G/N sont des groupes ordonnés. Soit P la partie de G définie par*

$$P = \{x \in G \mid x + N > 0 \text{ ou } x \in N^+\}.$$

Alors P est le cône positif d'une structure de groupe ordonné sur G si et seulement si N^+ est invariant par tous les automorphismes intérieurs de G.

PREUVE. Il est facile de vérifier que P est toujours un sous-monoïde de G et que $P \cap (-P) = \{0\}$. Le problème est de vérifier que P est *distingué* dans G. Soient donc $x \in P$ et $y \in G$. Si $x + N > 0$ (dans G/N), alors $(y + x - y) + N = (y + N) + (x + N) - (y + N) > 0$ donc $y + x - y \in P$; cependant, si $x \in N^+$, il s'agit de vérifier que $y + x - y \in N^+$; ceci n'est vrai pour tout $y \in G$ que si N^+ est stable par les automorphismes intérieurs de G. □

L'Exercice 5.23 montre que l'hypothèse supplémentaire sur N n'est pas inutile, contrairement à ce qui est affirmé dans [**Birk2**] (cependant, quand G est abélien, cette hypothèse est trivialement satisfaite). Quand cette hypothèse est satisfaite, nous dirons que G est une *extension lexicographique* de N par G/N. Notons que si G et H sont deux groupes, $G \times_{\text{lex}} H$ est une extension lexicographique de G par H.

La notion de produit lexicographique est très commode pour construire des groupes *dirigés*:

PROPOSITION 5.17. *Soient G et H deux groupes ordonnés. Si G est dirigé et non trivial, alors $G \times_{\text{lex}} H$ est dirigé.*

PREUVE. Soit $(x, y) \in G \times H$. Il suffit de construire un élément de $G \times_{\text{lex}} H$ qui est supérieur à (x, y) et à $(0, 0)$ (*voir* remarque après la preuve de la Proposition 5.11). Puisque G est non trivial et dirigé, $G^+ \neq \{0_G\}$, il existe donc un élément e dans $G^+ \setminus \{0\}$. Puisque G est dirigé, il existe $x' \in G$ tel que $0, x \leq x'$. Alors il est immédiat que $(x' + e, 0)$ est (strictement) supérieur à (x, y) et à $(0, 0)$ dans $G \times_{\text{lex}} H$. □

La notion de produit lexicographique permet alors de construire des exemples intéressants et faciles:

EXEMPLE 5.18. On munit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la structure de groupe ordonné triviale (*i.e.*, de cône positif $\{0\}$. Alors $\mathbb{Q} \times_{\text{lex}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est, par la Proposition 5.17, un groupe (abélien) dirigé. Cependant, ce n'est pas un groupe sans torsion! Ceci présente un contraste avec la proposition suivante:

PROPOSITION 5.19. *Tout groupe totalement ordonné est non perforé (donc sans torsion).*

PREUVE. Soit G un groupe totalement ordonné et soient $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et a et b dans G tels que $ma \leq mb$. On montre que $a \leq b$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Puisque G est totalement ordonné, $a > b$. On montre alors par récurrence sur n

que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'inégalité $na > nb$ est satisfaite: c'est vrai par hypothèse pour $n = 1$, et si c'est vrai pour $n \geq 1$, alors $(n+1)a = na+a > nb+a$(par hypothèse de récurrence)$> nb + b$ (par hypothèse)$= (n + 1)b$. En particulier, $ma > mb$, une contradiction. Par suite, G est non perforé. Par suite, G est sans torsion. □

Dans le cas *abélien*, nous allons maintenant montrer une réciproque de la Proposition 5.19, qui donne l'équivalence suivante:

Proposition 5.20 (utilise PIT). *Un groupe abélien est totalement ordonnable si et seulement si il est sans torsion.*

Preuve. Nous avons vu dans la Proposition 5.19 que tout groupe totalement ordonnable est sans torsion. Réciproquement, soit G un groupe abélien sans torsion. Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des sous-groupes finiment engendrés de G, et pour tout $H \in \mathbf{P}$, posons

$$\mathbf{F}_H = \Big\{ f \in \{0,1\}^G \mid f(0) = 1 \text{ et } (\forall x, y \in H)(f(x) = f(y) = 1 \Rightarrow f(x+y) = 1) \\ \text{et } (\forall x \in H \setminus \{0\})(f(x) + f(-x) = 1) \Big\}.$$

Pour tout $H \in \mathbf{P}$, $\mathbf{F}_H$ est donc l'ensemble des applications de G vers $\{0,1\}$ telles que $f\restriction_H$ est la fonction caractéristique du cône positif d'un ordre total de groupe sur H.

Fait 1. *Pour tout $H \in \mathbf{P}$, $\mathbf{F}_H \neq \varnothing$.*

Preuve du Fait. Puisque H est un groupe abélien finiment engendré et sans torsion, il est isomorphe (en tant que groupe) à un certain $\mathbb{Z}^r$ où r est un entier naturel. Mais, en utilisant l'ordre lexicographique (par exemple

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times_{\text{lex}} (\mathbb{Z} \times_{\text{lex}} (\mathbb{Z} \times_{\text{lex}} \cdots \times_{\text{lex}} \mathbb{Z}) \cdots)}_{r \text{ fois}}$$

), on voit facilement que $\mathbb{Z}^r$ est totalement ordonnable: par suite, $\mathbf{F}_H \neq \varnothing$. □ Fait 1.

On peut de plus observer que pour tout $x \in G$, $\{f \in \{0,1\}^G \mid f(x) = 1\}$ et $\{f \in \{0,1\}^G \mid f(x) = 0\}$ sont, par définition de la topologie produit, des ouverts fermés de $\{0,1\}^G$; par suite, les F_H sont des fermés de $\{0,1\}^G$. Puisque $\mathbf{F}_{H_0+H_1} \subseteq \mathbf{F}_{H_0} \cap \mathbf{F}_{H_1}$ pour tous H_0 et H_1 dans $\mathbf{P}$, et par le Fait ci-dessus, l'ensemble $\{\mathbf{F}_H \mid H \in \mathbf{P}\}$ est centré. Puisque, par le Théorème de Tychonoff, $\{0,1\}^G$ est compact, l'intersection des $\mathbf{F}_H$ où $H \in \mathbf{P}$ est non vide. Tout élément de cette intersection est le cône positif d'un ordre total de groupe sur G. □

Voir cependant l'Exercice 5.27 pour montrer que même "l'absence de torsion forte"

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \qquad (\forall x, y)(mx = my \Longrightarrow x = y)$$

pour un groupe (non abélien) G n'entraîne pas que G est totalement ordonnable.

Exercices du Chapitre 5

EXERCICE 5.1. Pour tous ensembles *ordonnés* $(X_i, \leq_i)$ $(i < 2)$, on définit la *somme* $(X_0, \leq_0) \dotplus (X_1, \leq_1)$ comme étant $(X, \leq)$ où $X = (X_0 \times \{0\}) \cup (X_1 \times \{1\})$ et $\leq$ est la relation binaire sur X définie par

$$(x, \varepsilon) \leq (y, \eta) \Leftrightarrow \big((\varepsilon = \eta \text{ et } x \leq_\varepsilon y) \text{ ou } (\varepsilon = 0 \text{ et } \eta = 1)\big).$$

(a) Montrer que $\leq$ ci-dessus est une relation d'ordre sur X, et que si $\leq_0$ et $\leq_1$ sont des relation d'ordre *total*, alors $\leq$ est une relation d'ordre total.

(b) Montrer que la relation d'isomorphie pour les ensembles ordonnés est compatible avec $\dotplus$, *i.e.*, si $(X_i, \leq_i)$ et $(X'_i, \leq'_i)$ $(i < 2)$ sont des ensembles ordonnés tels que $(X_i, \leq_i) \cong (X'_i, \leq'_i)$ pour tout $i < 2$, alors

$$(X_0, \leq_0) \dotplus (X_1, \leq_1) \cong (X'_0, \leq'_0) \dotplus (X'_1, \leq'_1).$$

Pour tout ensemble ordonné $(X, \leq)$, le *type d'ordre* de $(X, \leq)$ est, par définition, la classe des ensembles ordonnés isomorphes à $(X, \leq)$. Malheureusement, avec cette définition, *un type d'ordre n'est pas un ensemble* (c'est trop gros) et il existe plusieurs moyens de contourner cette difficulté, suivant les axiomes satisfaits par l'univers ambiant—il n'en existe aucun "universel". Cependant, nous resterons à un niveau "naïf" et nous ne rentrerons pas dans ce genre de détail non structurel.

Cela dit, d'après (b), on peut définir une addition parmi les types d'ordre, en posant simplement

$$\text{type}(X_0, \leq_0) + \text{type}(X_1, \leq_1) = \text{type}\big((X_0, \leq_0) \dotplus (X_1, \leq_1)\big).$$

(c) Soient $(X_i, \leq_i)$ $(i < 2)$ et $(Y, \leq)$ des ensembles ordonnés. Montrer que

$$\text{type}(Y, \leq) = \text{type}(X_0, \leq_0) + \text{type}(X_1, \leq_1)$$

si et seulement si il existe deux parties Y_0 et Y_1 de X telles que les conditions suivantes sont remplies:

(i) $X = Y_0 \cup Y_1$ et $Y_0 \cap Y_1 = \varnothing$;

(ii) $(\forall (y_0, y_1) \in Y_0 \times Y_1)(y_0 < y_1)$;

(iii) pour tout $i < 2$, $(X_i, \leq_i) \cong (Y_i, \leq \restriction_{Y_i})$ (où $\leq \restriction_{Y_i}$ est la restriction de $\leq$ à Y_i, *i.e.*, $\leq \cap (Y_i \times Y_i)$).

On dira alors que $(X, \leq)$ est la *somme interne* de Y_0 et Y_1.

(d) Montrer que l'addition des types d'ordre est associative, d'élément neutre le type d'ordre de l'ensemble ordonné vide, noté naturellement 0.

Par suite, *en laissant de côté les problèmes "fondationnels"*, on a obtenu ainsi un monoïde *non-commutatif*. Notons que les types d'ordre total en forment un sous-"monoïde", et que les types de bon ordre en forment un sous-"monoïde" encore plus petit. Les types de bon ordre peuvent (dans la théorie des ensembles ZF) être identifiés aux *ordinaux*.

EXERCICE 5.2. Remplacer, dans l'Exercice 5.1, la relation d'isomorphie des ensembles ordonnés par la relation d'équipotence entre ensembles ($X \simeq Y$ si et seulement si il existe une bijection de X sur Y). On obtient ainsi les types d'équipotence, appelés plus communément les *cardinaux*.

(a) Imiter l'Exercice 5.1 pour la relation d'équipotence, et montrer que l'on obtient ainsi un "monoïde" *commutatif*.

(b) Montrer que tout cardinal "est" [*i.e.*, peut être identifié naturellement à] un type d'ordre discret.

Dans la théorie des ensembles ZF+AC (AC est l'axiome du choix), les cardinaux peuvent être identifiés aux "ordinaux initiaux", *i.e.*, les ordinaux qui ne sont équipotents à aucun de leurs segments initiaux propres. Sans axiome du choix, le problème est infiniment plus ardu, *voir* l'article de R. Bradford [**Brad**] à ce sujet.

Exercice 5.3. Pour deux algèbres de Boole A et B, on définit $A \dotplus B = A \times B$, et on considère la relation d'isomorphie entre les algèbres de Boole, définissant ainsi les *types d'isomorphisme d'algèbres de Boole*.

(a) Montrer, comme dans les exercices précédents, que $\dotplus$ est compatible avec l'addition, et que l'on peut ainsi définir l'addition des types d'isomorphisme d'algèbres de Boole.

Si A, B, et C sont trois algèbres de Boole, on dit que C est la *somme interne* de A et B quand A et B sont deux sous-algèbres de Boole de C et $C = A \oplus B$ en tant qu'anneaux de Boole.

(b) Montrer que si A, B, et C sont trois algèbres de Boole quelconques, $\mathrm{type}(C) = \mathrm{type}(A) + \mathrm{type}(B)$ si et seulement si il existe deux sous-algèbres de Boole A' et B' de C telles que $A' \cong A$, $B' \cong B$ et C est la somme interne de A et B.

(c) Montrer que l'addition des types d'isomorphisme d'algèbres de Boole est commutative et associative, et qu'elle admet un élément neutre (lequel?).

(d) Montrer que tout cardinal est [*i.e.*, peut être identifié naturellement à] un type d'isomorphisme d'algèbres de Boole.

Exercice 5.4. Appelons la *propriété de raffinement* ***commutant*** l'énoncé suivant:

$$(\forall a_0, a_1, b_0, b_1)\Bigg[a_0 + a_1 = b_0 + b_1 \Longrightarrow$$
$$(\exists_{i,j<2} c_{ij})\left(\bigwedge_{i<2}(a_i = c_{i0} + c_{i1} \text{ et } b_i = c_{0i} + c_{1i}) \text{ et } c_{01} + c_{10} = c_{10} + c_{01}\right)\Bigg] \tag{5.2}$$

Ainsi, dans le cas commutatif, la propriété de raffinement commutant est équivalente à la propriété de raffinement.

(a) Montrer que les cardinaux et les types d'isomorphismes d'algèbres de Boole (*voir* les Exercices 5.2 et 5.3) satisfont la propriété de raffinement.

(b) Montrer que si X et Y sont deux segments initiaux d'un même ensemble totalement ordonné, alors $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$.

(c) Montrer que les types d'isomorphismes d'ensembles *totalement ordonnés* (*voir*—et faire!—l'Exercice 5.1) satisfont la propriété de raffinement commutant (avec en prime "$c_{01} = 0$ ou $c_{10} = 0$"). En déduire le résultat correspondant pour les types de bons ordres.

(d) Montrer que tout groupe (abélien ou pas!) satisfait la propriété de raffinement commutant (avec en prime "$c_{01} = 0$ ou $c_{10} = 0$" au choix).

(e) Montrer qu'un semi-groupe *simplifiable* satisfait la propriété de raffinement si et seulement si il satisfait la propriété de raffinement commutant (ceci est donc valable en particulier pour les cônes positifs de groupes préordonnés).

Exercice 5.5. Pour tout espace vectoriel E sur un corps K, on munit l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des sous-espaces vectoriels de E de l'addition (dite "de Minkowski") définie

par

$$U + V = \{x + y \mid x \in U \text{ et } y \in V\}.$$

Montrer que $(\mathcal{S}(E), +, \subseteq, \{0\})$ est un sup-demi-treillis avec 0, et qu'en-dehors de quelques cas exceptionnels (lesquels?), il ne satisfait *pas* la propriété de raffinement.

Exercice 5.6. Soit $M = [0, 1]$ muni de "l'addition" $\oplus$ définie par $x \oplus y = \inf(x + y, 1)$. Montrer que M muni de son préordre algébrique satisfait la propriété de décomposition de Riesz

$$(\forall x, y, z)\big(z \leq x + y \Rightarrow (\exists x' \leq x)(\exists y' \leq y)(z = x' + y')\big),$$

mais *pas* la propriété de raffinement.

Exercice 5.7. Quand un monoïde *monogène* (*i.e.*, de la forme $\{ng \mid n \in \mathbb{N}\}$ si on le note additivement) satisfait-il la propriété de raffinement?

Exercice 5.8.

(a) Montrer que $(\mathbb{N}, +)$ satisfait la propriété de raffinement.
(b) En déduire que pour tout ensemble I, l'ensemble $\mathbb{N}^{(I)}$ des familles $(n_i)_{i \in I}$ à support fini (*i.e.*, telles que $\{i \in I \mid n_i \neq 0\}$ est fini) muni de l'addition (composante par composante) satisfait la propriété de raffinement.
(c) En utilisant la décomposition en facteurs premiers, en déduire que $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ (où $\cdot$ est la multiplication usuelle des entiers) satisfait la propriété de raffinement; puis que $(\mathbb{N}, \cdot)$ satisfait la propriété de raffinement.

Exercice 5.9. (Le but de cet exercice est d'établir une réciproque de l'Exercice 5.8) Pour tout monoïde commutatif M, on appelle un *atome* de M un élément a de $M \setminus \{0\}$ tel que M satisfait

$$(\forall x, y)(x + y = a \Longrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0))$$

Soit M un monoïde commutatif satisfaisant la propriété de raffinement. On suppose de plus que M est engendré (en tant que monoïde) par l'ensemble de ses atomes et que pour tout atome a de M, $2a \neq 0$ (noter l'exemple de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ldots$).

(a) Montrer que pour tout atome a et pour tout élément x de M, $x + a \neq 0$. En déduire que M est *conique*, *i.e.*, il satisfait l'axiome

$$(\forall x, y)(x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0).$$

(b) En déduire que pour tout atome a et pour tout entier $n \geq 2$, $na \neq a$.
(c) Montrer que si m et n sont des entiers naturels non nuls et a_i $(i < m)$ et b_j $(j < n)$ sont des atomes de M tels que $\sum_{i<m} a_i = \sum_{j<n} b_j$, alors $m = n$ et il existe une permutation σ de n (identifié à $\{0, \ldots, n-1\}$) telle que $(\forall i < n)(b_i = a_{\sigma(i)})$.
(d) En déduire que M est isomorphe à $\mathbb{N}^{(I)}$ où I est l'ensemble des atomes de M.

Exercice 5.10. Montrer que tout groupe abélien satisfait la propriété de raffinement.

Exercice 5.11. Montrer que $[0, +\infty]$ et $\{0, +\infty\}$, munis de l'addition naturelle, satisfont la propriété de raffinement.

Exercice 5.12. On considère l'ensemble $\mathbf{\Lambda}(\mathbb{R}^+)$ de tous les intervalles de $\mathbb{R}^+$ de la forme $[0, \alpha]$ $(0 \leq \alpha < +\infty)$ ou $[0, \alpha]$ $(0 < \alpha \leq +\infty)$. On munit $\mathbf{\Lambda}(\mathbb{R}^+)$ de l'addition $+$ définie par

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{x + y \mid x \in \mathfrak{a} \text{ et } y \in \mathfrak{b}\}.$$

Montrer que $+$ est une loi de composition interne sur $\mathbf{\Lambda}(\mathbb{R}^+)$, puis que $(\mathbf{\Lambda}(\mathbb{R}^+), +)$ est un monoïde commutatif (quel est son élément neutre?), non simplifiable. Montrer que $(\mathbf{\Lambda}(\mathbb{R}^+), +)$ satisfait la propriété de raffinement.

Exercice 5.13. Soit G un groupe ordonné. Montrer que G est totalement ordonné si et seulement si $G^+ \cup (-G^+) = G$.

Exercice 5.14. Soit G un groupe totalement ordonné. Montrer que G^+ satisfait la propriété de raffinement commutant (*voir* l'Exercice 5.4), "avec $c_{01} = 0$ ou $c_{10} = 0$".

Exercice 5.15. * Soit S un semi-groupe simplifiable (noté multiplicativement), satisfaisant la *condition d'Ore* suivante:

$$(\forall a, b)(\exists u, v)(au = bv).$$

Le but de cet exercice est de montrer que S se plonge dans un groupe dont les éléments s'écrivent tous sous la forme xy^{-1} où $x, y \in S$.

Pour tous a et b dans S, posons

$$E(a, b) = \{(u, v) \in S \times S \mid au = bv\}.$$

Pour tout $\xi = (u, v) \in S \times S$ et tout $s \in S$, on notera parfois $\xi s = (us, vs)$. On définit une relation binaire $\equiv$ sur $S \times S$ en posant

$$(a, b) \equiv (c, d) \Longleftrightarrow E(a, c) \cap E(b, d) \neq \varnothing.$$

(a) Montrer l'énoncé suivant:

$$(\forall (a, b) \in S \times S)(\forall \xi, \eta \in E(a, b))(\exists p, q \in S)(\xi p = \eta q).$$

(b) Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $S \times S$.

Pour tout $(a, b) \in S \times S$, nous noterons désormais $[a, b]$ la classe d'équivalence de (a, b) modulo $\equiv$.

(c) Montrer que pour tous (a, b) et (c, d) dans $S \times S$, $(a, b) \equiv (c, d)$ si et seulement si $E(a, c) = E(b, d)$.

(d) Montrer que pour tous a, b, et c dans S, $[a, b] = [ac, bc]$.

(e) Montrer que pour tous a, b, c, d, u', v', u'', v'' dans S,

$$\big((u', v') \in E(b, c) \text{ et } (u'', v'') \in E(b, c)\big) \Rightarrow (au', dv') \equiv (au'', dv'').$$

Ceci permet d'affirmer que $(a, b) * (c, d) = [au, dv]$ est indépendant de $(u, v) \in E(b, c)$.

(f) Montrer que pour tous a_0, b_0, a_1, b_1, c, d dans S,

$$(a_0, b_0) \equiv (a_1, b_1) \Longrightarrow (a_0, b_0) * (c, d) \equiv (a_1, b_1) * (c, d).$$

(g) Montrer que pour tous a, b, c_0, d_0, c_1, d_1 dans S,

$$(c_0, d_0) \equiv (c_1, d_1) \Longrightarrow (a, b) * (c_0, d_0) \equiv (a, b) * (c_1, d_1).$$

Ceci permet enfin de définir une loi de composition interne $\cdot$ sur $G = S \times S/\equiv$ en posant

$$[a, b] \cdot [c, d] = [au, dv] \qquad \text{pour tout } (u, v) \in E(b, c).$$

(h) Montrer que pour tous a, b, et c dans S, $[a,b]\cdot[b,c]=[a,c]$.
(i) Montrer que S satisfait l'énoncé

$$(\forall a,b,c,d)(\exists p,q,r)(ap=bq \text{ et } cq=dr).$$

(j) Montrer que $\cdot$ est associative sur G.
(k) Montrer que $\cdot$ est une loi de groupe sur G; quel est son élément neutre?
(l) Montrer que $j\colon S\to G,\ x\mapsto[xu,u]$ est indépendante de l'élément u de S et est un homomorphisme injectif de monoïdes de S dans G. Montrer de plus que pour tous a et b dans S, $[a,b]=j(a)j(b)^{-1}$. Conclure.

Exercice 5.16. Soit $E=\mathbb{R}^3$ et soient a, a', b, b' les éléments de E définis par

$$a=(1,0,0);\quad a'=(0,1,0);\quad b=(0,0,1);\quad b'=(1,1,-1).$$

Soit $P=\{(x,y,z)\in E\mid 0,-z\le x,y\}$.
(a) Montrer que P est un cône convexe de $\mathbb{R}^3$ et que $P\cap(-P)=\{0\}$.
(b) Montrer que P ne satisfait pas la propriété de raffinement. (***Indication:*** noter que $a+a'=b+b'$).

Exercice 5.17. Disons, par définition, qu'un homomorphisme de cônes convexes est un homomorphisme préservant la multiplication scalaire par un réel positif.
(a) Montrer que tout cône convexe *finiment engendré* (en tant que cône convexe) de $\mathbb{R}^2$ est isomorphe à $\{0\}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
(b) Soit $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x,y)=(0,0) \text{ ou } y>0\}$. Montrer que P n'est pas finiment engendré.
(c) Montrer que tout cône convexe de $\mathbb{R}^2$ satisfait la propriété de raffinement (on pourra se ramener au cas finiment engendré et utiliser (a)). Comparer au résultat de l'Exercice 5.16.

Exercice 5.18. * On considère les deux énoncés suivants du langage $(+,0,\le)$:

$$\text{(RD1)}\qquad (\forall x,y,z)\big(z\le x+y\Rightarrow(\exists x'\le x)(\exists y'\le y)(z=x'+y')\big),$$
$$\text{(RD2)}\qquad (\forall x,y,z)\big(z\ge x+y\Rightarrow(\exists x'\ge x)(\exists y'\ge y)(z=x'+y')\big).$$

Soit E un espace vectoriel préordonné de dimension au plus égale à 2, soit P un cône convexe de E *tel que* $P\subseteq E^+$. Montrer que $(P,+,0)$ *muni de la restriction à* P *du préordre de* E satisfait RD1 et RD2 (***Indication:*** si a, b, et c sont des éléments de P—avec, suivant le cas, $c\le a+b$ ou $c\ge a+b$, voir d'abord le cas où a et b sont linéairement dépendants. Dans le cas où a et b sont linéairement indépendants, on pourra exprimer c comme combinaison linéaire de a et b et discuter suivant les positions des coefficients).

Exercice 5.19. Soit G un groupe préordonné. Montrer que $G^{\pm}$ est l'ensemble des éléments g de G tels que $\{0,g\}$ est *borné*.

Exercice 5.20. * Trouver un exemple de groupe (nécessairement non commutatif) G et d'un sous-monoïde P de G tel que $(\forall a\in P)(a+P\subseteq P+a)$ qui ne satisfait *pas* $(\forall a\in P)(a+P=P+a)$.

Exercice 5.21. Montrer que le monoïde $(\mathbb{N}\setminus\{1\},+,0)$ ne satisfait pas la propriété de raffinement.

Exercice 5.22. Quels sont les sous-monoïdes de $(\mathbb{N},+,0)$ qui satisfont la propriété de raffinement?

Rappelons que si G et H sont deux groupes et τ est un homomorphisme de groupes de H vers le groupe $\operatorname{Aut} G$ des automorphismes de G, alors le *produit semi-direct* de G par H relativement à τ, noté $G \rtimes_\tau H$, est l'ensemble sous-jacent $G \times H$ muni de la loi de composition interne $*$ définie par

$$(x, y) * (x', y') = (x \cdot \tau(y)(x'), y \cdot y').$$

Alors $G \rtimes_\tau H$ est un groupe, en général non commutatif.

Exercice 5.23. Soit $N = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, considéré en tant que sous-groupe ordonné de $(\mathbb{R}, +, 0, \leq)$, et soit τ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ vers le groupe des automorphismes de groupe de N défini par

$$\tau(1)\colon x + y\sqrt{2} \mapsto y + x\sqrt{2}.$$

Puis soit $G = N \rtimes_\tau \mathbb{Z}$; ainsi, N s'identifie à un sous-groupe distingué de G.

Montrer que N^+ n'est pas stable par les automorphismes intérieurs de G. Comparer avec la Proposition 5.16.

Exercice 5.24. Prouver que si G et H sont deux groupes ordonnés, alors $G \times_{\text{lex}} H$ est une extension lexicographique de G par H.

Exercice 5.25. Soient G et H deux groupes ordonnés et soit $f\colon G^+ \to H^+$ un homomorphisme de monoïdes. Alors f se prolonge en un seul homomorphisme de groupes ordonnés de $G^\pm$ vers H.

Exercice 5.26. (*voir* l'Exercice 5.25) Soit G le groupe $\mathbb{Z}$ muni du cône positif $2\mathbb{N}$ (noter, en particulier, que G n'est *pas* dirigé). Montrer que l'homomorphisme de monoïdes $f\colon G^+ \to \mathbb{Z}^+,\ n \mapsto n/2$ ne se prolonge pas en un homomorphisme de groupes ordonnés de G vers H.

Exercice 5.27. Soit τ l'application de $\mathbb{Z}$ vers l'ensemble $\operatorname{Aut} \mathbb{Q}$ des automorphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tau(n)\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto (-2)^n x.$$

(a) Montrer que τ est un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(\operatorname{Aut}(\mathbb{Q}), \circ)$.

Soit G le produit semi-direct $\mathbb{Q} \rtimes_\tau \mathbb{Z}$.

(b) Pour tout $(x, y) \in G$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, calculer $n(x, y) = \underbrace{(x, y) + \cdots + (x, y)}_{n \text{ fois}}$.

(c) En déduire que G satisfait la forme forte d'absence de torsion suivante: pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$(\forall x, y \in G)(mx = my \Longrightarrow x = y).$$

(d) Soient $a = (1, 0)$ et $b = (0, 1)$. Montrer que $-b + 2a + b = -a$. En déduire que G n'est pas totalement ordonnable.

Exercice 5.28. Montrer qu'un groupe G est totalement ordonnable si et seulement si tout sous-groupe finiment engendré de G est totalement ordonnable (*voir* la preuve de la Proposition 5.20).

Exercice 5.29. * Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que tout ordre d'espace vectoriel sur E est l'intersection des ordres totaux d'espace vectoriel sur E qui le contiennent.

Exercice 5.30. * Soit G un groupe (non nécessairement abélien). Pour tout entier naturel non nul n et toute suite finie $(a_i)_{i<n}$ d'éléments de $G \setminus \{0\}$, soit $S[a_i \mid i < n]$ le sous-semi-groupe *distingué* de G engendré par $\{a_i \mid i < n\}$.

Soit P le cône positif d'un ordre de groupe sur G. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe un ordre total de groupe sur G dont le cône positif Q contient P;

(ii) Pour tout entier naturel non nul n et tous a_i $(i < n)$ dans $G \setminus \{0\}$, il existe $\epsilon\colon n \to \{-1, 1\}$ tel que
$$S[a_i^{\epsilon_i} \mid i < n] \cap P = \varnothing.$$
En déduire que G est totalement ordonnable si et seulement si pour tout entier naturel non nul n et tous a_i $(i < n)$ dans $G \setminus \{0\}$, il existe $\epsilon\colon n \to \{-1, 1\}$ tel que
$$0 \notin S[a_i^{\epsilon_i} \mid i < n].$$

Exercice 5.31. Soit G un groupe abélien. On note $T(G)$ le *groupe de torsion* de G, *i.e.*,
$$T(G) = \{x \in G \mid (\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(nx = 0)\}.$$
Supposons G non trivial. Montrer que l'on peut structurer G en un groupe ordonné *dirigé* si et seulement si $G \neq T(G)$. (***Indication:*** supposons que $G \neq T(G)$. Construire l'ordre sur G par extension lexicographique de $T(G)$ par $G/T(G)$, avec des ordres bien choisis).

Exercice 5.32. Montrer que tout groupe abélien non perforé G admet un plongement (aussi bien pour la structure de groupe que pour celle d'ordre) dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ordonné $\bar{G}$. (***Indication:*** Construire des "quotients" x/n où x appartient au groupe de départ et n est un entier naturel non nul). Montrer que si G est totalement ordonné, alors on peut prendre $\bar{G}$ totalement ordonné.

Exercice 5.33. Soit G un *groupe de torsion*, *i.e.*, pour tout élément g de G, il existe un entier naturel non nul n tel que $ng = 0$. Montrer que la seule structure de groupe ordonné sur G est celle de cône positif réduit à $\{0\}$.

CHAPITRE 6

Groupes réticulés: une introduction

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à une certaine classe "idéale" (au premier abord) de groupes ordonnés, les *groupes réticulés*.

DÉFINITION. Un groupe ordonné G est un *groupe réticulé*, ou *ℓ-groupe*, quand toute paire d'éléments de G admet une borne supérieure.

Conformément à la notation employée pour les treillis, nous noterons, pour tous éléments a et b d'un groupe ordonné G, $a \wedge b$ (resp., $a \vee b$) la borne inférieure (resp., la borne supérieure) de $\{a, b\}$ dans G *si elle existe*. Il est immédiat qu'un groupe ordonné G est réticulé si et seulement si pour tout $x \in G$, $x \vee 0$ existe (en effet, les *translations* $x \mapsto a + x$ sont des automorphismes pour l'ordre).

Une classe importante d'exemples de groupes réticulés est donnée par l'exemple suivant:

EXEMPLE 6.1. Tout groupe totalement ordonné est réticulé. En particulier, $(\mathbb{R}, +, 0, \leq)$ est un groupe réticulé.

Dans le cas général, $a \wedge b$ et $a \vee b$ sont intimement liés, par l'observation simple suivante:

LEMME 6.2. *Soit G un groupe ordonné et soient a et b deux éléments de G. Alors l'application $\phi_{a,b} \colon G \to G,\ x \mapsto a - x + b$ est un isomorphisme de $(G, \leq)$ sur $(G, \geq)$.*

Attention, $\phi_{a,b}$ n'est pas forcément un homomorphisme de $(G, +)$ vers lui-même, même si G est commutatif.

PREUVE. L'application $x \mapsto -x$ est un isomorphisme de $(G, \leq)$ sur $(G, \geq)$, et pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g + x$ et l'application $x \mapsto x + g$ sont des automorphismes de $(G, \leq)$. On obtient le résultat par composition. $\square$

COROLLAIRE 6.3. *Soient a et b deux éléments d'un groupe ordonné G. Alors $\{a, b\}$ admet une borne inférieure si et seulement si $\{a, b\}$ admet une borne supérieure, et l'*identité modulaire

$$a - (a \wedge b) + b = a \vee b$$

est alors satisfaite.

PREUVE. Rappelons que pour tout $x \in G$, on note $\downarrow x$ (resp., $\uparrow x$) l'ensemble des minorants (resp., majorants) de x dans G. Alors, par le Lemme 6.2, $\phi_{a,b}$ est un isomorphisme de $(\downarrow a \cap \downarrow b, \leq)$ sur $(\uparrow \phi(a) \cap \uparrow \phi(b), \geq)$. Mais $\phi_{a,b}(a) = a - a + b = b$ et $\phi_{a,b}(b) = a - b + b = a$, donc $\phi_{a,b}$ est un isomorphisme de $(\downarrow a \cap \downarrow b, \leq)$ sur $(\uparrow a \cap \uparrow b, \geq)$; donc le premier ensemble admet un plus grand élément (qui est alors $a \wedge b$) si et seulement si le second admet un plus petit élément (qui est alors $a \vee b$), et alors $a \vee b = \phi_{a,b}(a \wedge b)$, d'où la conclusion. $\square$

En particulier, un groupe ordonné G est réticulé si et seulement si $(G, \leq)$ est un treillis (on utilise donc "réticulé" comme l'adjectif correspondant au nom "treillis"). Ce treillis n'est borné que quand G est trivial, *i.e.*, $G = \{0\}$.

Exemple 6.4. Pour tout espace topologique X, le groupe additif des applications *continues* de X vers $\mathbb{R}$ (traditionnellement noté $\mathbf{C}(X)$), muni de l'ordre "naturel" (défini par $f \leq g$ si et seulement si $f(x) \leq g(x)$, pour tout $x \in X$) est un groupe réticulé. De plus, pour tous éléments f et g de $\mathbf{C}(X)$, $f \vee g$ et $f \wedge g$ sont respectivement définis par

$$\begin{cases} (\forall x \in X)\big((f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}\big), \\ (\forall x \in X)\big((f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}\big). \end{cases}$$

(*exercice:* écrire les preuves!)

Notons enfin que si G est un groupe réticulé, alors $x \mapsto -x$ est un isomorphisme de $(G, +, 0, \leq)$ sur $(G, +', 0, \geq)$ (où $x +' y = y + x$ pour tous x, y dans G) et que ce dernier est aussi un groupe réticulé. Par suite, nous obtenons aussi un *principe de dualité* pour les groupes réticulés:

Principe de dualité. *Si θ est un énoncé (formulé, par exemple, dans le langage $(+, 0, \leq, \vee, \wedge)$) satisfait par tout groupe réticulé, alors l'énoncé "dual" de θ, obtenu en remplaçant dans ce dernier $\leq$ par $\geq$, $\wedge$ par $\vee$ et $\vee$ par $\wedge$, est aussi satisfait par tous les groupes réticulés.*

Pour en revenir à l'identité modulaire, cette dernière prend, dans les groupes réticulés abéliens, la forme

$$a + b = a \wedge b + a \vee b.$$

En prenant pour G le groupe additif de $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, on retrouve l'identité classique

$$a + b = \max(a, b) + \min(a, b).$$

En prenant pour G le groupe multiplicatif des nombres rationnels strictement positifs, ordonné par divisibilité, on retrouve l'identité classique

$$a \cdot b = \mathrm{pgcd}(a, b) \cdot \mathrm{ppcm}(a, b).$$

Le Corollaire 6.3 est spécifique aux groupes ordonnés (et à certains monoïdes ordonnés)—*voir* l'Exercice 6.1.

Corollaire 6.5. *Tout groupe réticulé satisfait l'énoncé*

$$(\forall x, y)\big(x - (x \wedge y) + y = x \vee y\big).$$

De façon plus générale, en utilisant encore le fait que pour tout groupe ordonné G et pour tout $g \in G$, $x \mapsto g + x$ et $x \mapsto x + g$ sont des automorphismes de $(G, \leq)$, on obtient les identités (infinitaires) suivantes:

$$\begin{cases} a + \bigwedge X + b = \bigwedge(a + X + b) & \text{si } X \text{ est une partie non vide minorée de } G \\ a + \bigvee X + b = \bigvee(a + X + b) & \text{si } X \text{ est une partie non vide majorée de } G \\ a - \bigwedge X + b = \bigvee(a + (-X) + b) & \text{si } X \text{ est une partie non vide minorée de } G \\ a - \bigvee X + b = \bigwedge(a + (-X) + b) & \text{si } X \text{ est une partie non vide majorée de } G. \end{cases}$$

Ici, le sens de "identité" signifie la chose suivante: $s = t$ est une identité, quand

"s est défini si et seulement si t est défini, et alors $s = t$".

En particulier, dans tout groupe réticulé, les identités suivantes sont satisfaites:

$$(-a) \vee (-b) = -(a \wedge b); \qquad (-a) \wedge (-b) = -(a \vee b).$$

On peut alors déduire de tout cela d'autres identités, comme par exemple

$$a \wedge b + c \vee d = (a \wedge b + c) \vee (a \wedge b + d) = ((a + c) \wedge (b + c)) \vee ((a + d) \wedge (b + d)),$$

etc. (la convention est en général que $\wedge$ et $\vee$ l'emportent sur $+$, par exemple $a \wedge b + c = (a \wedge b) + c$).

Ce n'est pas dans ce sens-là que l'on doit prendre les "identités de distributivité" (comme le montrera l'exemple qui suit):

Proposition 6.6. *Soit G un groupe réticulé, soient $a \in G$ et $X \subseteq G$. Si X admet une borne supérieure, alors $a \wedge X$ admet aussi une borne supérieure, et*

$$a \wedge \bigvee X = \bigvee (a \wedge X).$$

De même, si X admet une borne inférieure, alors $a \vee X$ admet aussi une borne inférieure, et

$$a \vee \bigwedge X = \bigwedge (a \vee X).$$

Preuve. Prouvons, par exemple, la première identité. Posons $b = \bigvee X$. Alors pour tout $x \in X$, $a \wedge x \leq a \wedge b$, donc $a \wedge b$ est un majorant de $a \wedge X$. Soit c un majorant de $a \wedge X$. Pour tout $x \in X$, l'identité modulaire entraîne que $a \vee b \geq a \vee x = a - a \wedge x + x \geq a - c + x$. Par suite, en prenant la borne supérieure des deux membres, on obtient $a \vee b \geq a - c + b$, ou encore, en appliquant de nouveau l'identité modulaire, $a - a \wedge b + b \geq a - c + b$, d'où $a \wedge b \leq c$. Par suite, $a \wedge b$ est bien le plus petit majorant de $a \wedge X$, *c.à.d.* $\bigvee (a \wedge X)$. La seconde identité s'obtient de la première par dualité. $\square$

Exemple 6.7. Prenons $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, muni de son ordre naturel, $a = (1, 0)$, et $X = \{(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors pour tout $x \in X$, $a \wedge x = 0$, donc $\bigvee (a \wedge X) = \bigvee \{0\} = 0$; cependant, $\bigvee X$ n'est pas défini (*i.e.*, X n'admet pas de borne supérieure dans G).

Corollaire 6.8. *Dans un groupe réticulé, $\wedge$ et $\vee$ sont distributives l'une par rapport à l'autre (*i.e.*, tout groupe réticulé est un treillis distributif).*

Proposition 6.9. *Soit G un groupe réticulé (non nécessairement commutatif). Alors G^+ satisfait la propriété de raffinement.*

Preuve. Soient a, a', b, et b' dans G^+ tels que $a + a' = b + b'$. On montre que le tableau suivant est une matrice de raffinement:

	b	b'
a	$a \wedge b$	$-(a \wedge b) + a$
a'	$-(a \wedge b) + b$	$a' \wedge b'$

(6.1)

Il est trivial que $a = a \wedge b + (-(a \wedge b) + a)$ et $b = a \wedge b + (-(a \wedge b) + b)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} -(a \wedge b) + a + a' \wedge b' &= -(a \wedge b) + (a + a') \wedge (a + b') \\ &= -(a \wedge b) + (b + b') \wedge (a + b') \\ &= -(a \wedge b) + b \wedge a + b' \\ &= b', \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} -(a \wedge b) + b + a' \wedge b' &= -(a \wedge b) + (b + a') \wedge (b + b') \\ &= -(a \wedge b) + (b + a') \wedge (a + a') \\ &= -(a \wedge b) + b \wedge a + a' \\ &= a'. \end{aligned}$$

Donc le tableau (6.1) est une matrice de raffinement. Il reste à conclure que les coefficients de cette matrice appartiennent à G^+, ce qui est trivial. □

Notons que d'après l'Exercice 5.4(e), G^+ satisfait la propriété de raffinement *commutant.* Nous n'aurons pas besoin de ce résultat, aussi ne donnerons-nous pas ici de détails sur ce point.

Bien que l'on puisse déduire facilement la proposition suivante de la propriété de raffinement, une preuve directe en est encore plus facile:

PROPOSITION 6.10. *Tout cône positif d'un groupe réticulé satisfait l'inégalité suivante:*

$$a \wedge (b + c) \leq a \wedge b + a \wedge c, \quad \textit{pour tous } a,\ b,\ c.$$

PREUVE. Une vérification immédiate:

$$\begin{aligned} a \wedge (b + c) &= a \wedge (a + c) \wedge (b + c) \\ &= a \wedge ((a \wedge b) + c) \\ &= a \wedge ((a \wedge b) + a) \wedge ((a \wedge b) + c) \\ &= a \wedge ((a \wedge b) + (a \wedge c)) \\ &\leq a \wedge b + a \wedge c. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 6.11. *Pour tous éléments a, b, et c d'un groupe réticulé,*

$$\begin{aligned} a \wedge b = a \wedge c = 0 &\Longrightarrow a \wedge (b + c) = 0, \\ a \vee b = a \vee c = 0 &\Longrightarrow a \vee (b + c) = 0. \end{aligned}$$

PREUVE. Le premier énoncé résulte immédiatement de la Proposition 6.10. Le second énoncé s'obtient du premier par dualité. □

DÉFINITION. Deux éléments a et b d'un groupe réticulé sont *orthogonaux*, ce que nous noterons $a \perp b$, quand $a \wedge b = 0$.

Notons que $a \perp b$ entraîne que $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Si par exemple G est le groupe multiplicatif des nombres rationnels strictement positifs, ordonné par divisibilité, $a \perp b$ signifie que a et b sont premiers entre eux (les décompositions en facteurs premiers sont disjointes).

Un résultat facile mais très important est alors le suivant:

PROPOSITION 6.12. *Pour tous éléments a et b d'un groupe réticulé,*

$$\textit{si } a \wedge b = 0, \textit{ alors } a + b = b + a = a \vee b.$$

PREUVE. En utilisant l'identité modulaire pour le couple (a, b) puis pour le couple (b, a), on obtient respectivement $a \vee b = a - 0 + b$ et $b \vee a = b - 0 + a$, d'où la conclusion puisque $a \vee b = b \vee a$. □

NOTATION. Pour tout élément a d'un groupe réticulé, on pose $a^+ = a \vee 0$ et $a^- = (-a)^+ = (-a) \vee 0$. Notons que a^+ et a^- sont positifs.

LEMME 6.13. *Soit G un groupe réticulé.*

(a) *Pour tout élément a de G, $a^+ \perp a^-$ et $a = a^+ - a^-$.*
(b) *Pour tous éléments b et c de G, si $b \perp c$, alors $(b-c)^+ = b$ et $(b-c)^- = c$.*
(c) *Pour tous éléments a et b de G, $(a+b)^+ \leq a^+ + b^+$ et $(a+b)^- \leq b^- + a^-$.*

PREUVE. (a) Tout d'abord, puisque a^+ et a^- sont positifs, $a^+ \wedge a^- \geq 0$. Réciproquement, en utilisant le Corollaire 6.8 (et, en fait, la distributivité dans le cas fini), on obtient

$$a^+ \wedge a^- = (a \vee 0) \wedge ((-a) \vee 0) = (a \wedge (-a)) \vee 0,$$

il suffit donc de montrer que $x = a \wedge (-a)$ est inférieur ou égal à 0. Mais $2x \leq a + (-a) = 0$, d'où $2x \vee 0 = 0$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 2(x \vee 0) = x \vee 0 + x \vee 0 &= (x + x \vee 0) \vee (0 + x \vee 0) \\ &= (x + x) \vee (x + 0) \vee (0 + x) \vee (0 + 0) \\ &= 2x \vee x \vee 0 \\ &= x \vee 0, \end{aligned}$$

d'où, en simplifiant, $x \vee 0 = 0$. Par suite, $x \leq 0$, et donc $a^+ \wedge a^- = 0$.

De plus, l'identité modulaire appliquée à $(a, 0)$ donne $a - (a \wedge 0) = a \vee 0$, *i.e.*, $a + a^- = a^+$, d'où $a = a^+ - a^-$.

(b) En utilisant la Proposition 6.12, on obtient $(b-c)^+ = (b-c) \vee 0 = (b \vee c) - c = (b + c) - c = b$; par suite, $(b - c)^- = (c - b)^+ = c$.

(c) Puisque $0, a \leq a^+$ et $0, b \leq b^+$, on a $0, a + b \leq a^+ + b^+$, d'où $(a + b)^+ \leq a^+ + b^+$. Par suite, $(a + b)^- = (-b - a)^+ \leq (-b)^+ + (-a)^+ = b^- + a^-$. □

Par suite, (a^+, a^-) est le *seul* couple d'éléments orthogonaux (b, c) tel que $a = b - c$, et a^+ et a^- commutent ($a^+ + a^- = a^- + a^+$). Notons aussi que, par le Lemme 6.13(a), *tout groupe réticulé est dirigé.*

LEMME 6.14. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tous éléments b et c d'un groupe réticulé,*

$$b \perp c \Longrightarrow mb \perp mc.$$

PREUVE. Par le Corollaire 6.11 et par un raisonnement facile par récurrence, $b \perp c$ entraîne que $b \perp mc$. Le même raisonnement donne alors $mb \perp mc$. □

COROLLAIRE 6.15. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout élément a d'un groupe réticulé,*

$$(ma)^+ = m(a^+) \textit{ et } (ma)^- = m(a^-).$$

PREUVE. Puisque $a = a^+ - a^-$ (Lemme 6.13(a)) et que a^+ et a^- commutent, $ma = m(a^+) - m(a^-)$. Mais $m(a^+)$ et $m(a^-)$ sont, par le Lemme 6.14, orthogonaux: par suite, par le Lemme 6.13(b), $(ma)^+ = m(a^+)$ et $(ma)^- = m(a^-)$. □

Corollaire 6.16. *Pour tout $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, tout groupe réticulé satisfait l'énoncé*

$$(\forall x)(mx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0).$$

En particulier, tout groupe réticulé est sans torsion.

Preuve. Si $mx \geq 0$, alors $(mx)^- = 0$, *i.e.*, $m(x^-) = 0$ par le Corollaire 6.15. Puisque $m \geq 1$, on obtient $0 \leq x^- \leq m(x^-) = 0$, d'où $x^- = 0$, *c.à.d.* $x \geq 0$. L'absence de torsion s'ensuit immédiatement. □

Notons qu'il existe (*voir* par exemple l'Exercice 6.9) des groupes réticulés non commutatifs ayant des éléments a et b tels que $2a = 2b$ mais $a \neq b$. En particulier, bien que tout groupe réticulé *abélien* soit non perforé, il existe des groupes réticulés 2-perforés.

Définition. Pour tout élément a d'un groupe réticulé G, on note $|a| = a \vee (-a)$ la *valeur absolue* de a.

Proposition 6.17. *Soit G un groupe réticulé.*

(a) *Pour tout $a \in G$, $|a| = a^+ + a^- \geq 0$.*
(b) *Pour tout $a \in G$, $|a|$ est le plus petit élément x de G tel que $-x \leq a \leq x$.*
(c) *Pour tout $a \in G$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $|m \cdot a| = |m| \cdot |a|$.*
(d) *Pour tous a et b dans G,*

$$|a + b| \leq (|a| + |b|) \vee (|b| + |a|) \leq |a| + |b| + |a|.$$

Preuve. (a) Posons $b = |a|$. Puisque $b \geq a$ et $b \geq -a$, $2b \geq a - a = 0$, donc, par le Corollaire 6.16, $b \geq 0$. Par suite, $a^+ + a^- = a \vee 0 + (-a) \vee 0 = (a - a) \vee (a + 0) \vee (0 - a) \vee (0 + 0) = a \vee (-a) \vee 0 = b \vee 0 = b$.

(b) Pour tout $x \in G$, $-x \leq a \leq x$ si et seulement si $a \leq x$ et $-a \leq x$, si et seulement si $|a| \leq x$; d'où (b).

(c) Tout d'abord pour $m = -1$, on obtient $|-a| = (-a) \vee a = a \vee (-a) = |a|$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on obtient, en utilisant le (a) puis le Corollaire 6.15, $|ma| = (ma)^+ + (ma)^- = m(a^+) + m(a^-)$; mais a^+ et a^- commutent (6.12 et 6.13), d'où $|ma| = m(a^+ + a^-) = m|a|$. Le cas $m < 0$ s'obtient alors en utilisant le cas $m = -1$.

(d) $|a + b| = (a + b) \vee (-b - a) \leq (|a| + |b|) \vee (|b| + |a|) \leq |a| + |b| + |a|$. □

Voir l'Exercice 6.5 pour régler le cas de l'inégalité triangulaire. Une autre application de ce qui précède est la suivante:

Proposition 6.18. *Un groupe réticulé est archimédien si et seulement si il est intégralement clos.*

Preuve. Tout groupe ordonné intégralement clos est archimédien. Réciproquement, soit G un groupe réticulé archimédien. Soient a et b dans G tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $na \leq b$ est satisfaite. Alors $b \geq 0$ (prendre $n = 0$), donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(na)^+ \leq b$, donc, par le Corollaire 6.15, $n(a^+) \leq b$; puisque $b \geq 0$ et $a^+ \geq 0$, on obtient $(\forall n \in \mathbb{Z})(n(a^+) \leq b$, d'où, puisque G est archimédien, $a^+ = 0$. Par suite, $a \leq 0$. □

Nous allons à présent essayer de trouver un analogue du "théorème de Cayley pour les groupes ordonnés" (*voir* Proposition 5.9). Le problème est nettement plus difficile (mais, comme nous allons le voir, pas si difficile que ça), car il existe des ensembles ordonnés dont le groupe ordonné d'automorphismes n'est *pas* un groupe réticulé. Aussi allons-nous nous concentrer sur les ensembles *totalement ordonnés.*

PROPOSITION 6.19. *Soit T une chaîne. Alors le groupe ordonné* $\operatorname{Aut} T$ *des automorphismes de T est réticulé, et pour tous éléments f et g de* $\operatorname{Aut} T$,

$$(\forall x \in T) \begin{cases} f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \\ f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}. \end{cases}$$

PREUVE. Soient f et g deux éléments de $\operatorname{Aut} T$. Soient h et k les applications de T vers T définies par

$$h\colon x \mapsto \max\{f(x), g(x)\},$$
$$k\colon x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}.$$

Par suite, dans le treillis des applications de T vers T (muni de l'ordre "composante par composante"), $h = f \vee g$ et $k = f \wedge g$. On montre d'abord que h et k appartiennent à $\operatorname{Aut} T$. *Puisque T est totalement ordonné* (*voir* à ce sujet l'Exercice 6.7!!), il est facile de voir que T satisfait l'énoncé

$$(\forall s, t, s', t')\big((s < s' \text{ et } t < t') \Rightarrow (\max\{s, t\} < \max\{s', t'\} \text{ et } \min\{s, t\} < \min\{s', t'\})\big).$$

Par suite, h et k sont strictement croissantes. Il reste à montrer (puisque T est totalement ordonné) qu'elles sont surjectives; montrons le par exemple pour h. Soit donc $y \in T$; posons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = g^{-1}(y)$. Si $y \geq g \circ f^{-1}(y)$, alors $h(x) = \max\{y, g \circ f^{-1}(y)\} = y$; sinon, puisque T est totalement ordonné, $g^{-1}(y) \leq f^{-1}(y)$, d'où $f \circ g^{-1}(y) \leq y$, d'où $h(x') = \max\{f \circ g^{-1}(y), y\} = y$. Dans les deux cas, y appartient à l'image de h. Ainsi, h appartient à $\operatorname{Aut} T$. De même, k appartient à $\operatorname{Aut} T$.

Par suite, $\operatorname{Aut} T$ est un sous-treillis de $(T^T, \vee, \wedge)$. Il reste à vérifier que l'ordre sur $\operatorname{Aut} T$ est compatible avec sa structure de groupe, *i.e.*, pour tous f, g, et h dans $\operatorname{Aut} T$, $f \leq g$ implique $f \circ h \leq g \circ h$ et $h \circ f \leq h \circ g$: mais ceci résulte trivialement du fait que les éléments de $\operatorname{Aut} T$ sont des applications *croissantes*. □

Afin de démontrer l'analogue pour les groupes réticulés du théorème de Cayley, nous aurons besoin de la notion de *sous-groupe solide*, qui est l'analogue dans le cas des groupes réticulés de la notion de sous-groupe:

DÉFINITION. Soit G un groupe réticulé. Une partie C de G est dite *solide* quand elle satisfait l'énoncé suivant:

$$(\forall x \in G)(\forall y \in C)(|x| \leq |y| \Longrightarrow x \in C).$$

Un sous-groupe solide I de G est dit *premier* quand l'énoncé suivant est satisfait:

$$(\forall x, y \in G)\big(x \wedge y \in I \Rightarrow (x \in I \text{ ou } y \in I)\big).$$

En particulier, toute partie solide est stable par la fonction $x \mapsto |x|$ et par la fonction $x \mapsto -x$. Nous noterons $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des sous-groupes solides de G.

LEMME 6.20. *Soit I un sous-groupe d'un groupe réticulé G. Alors I est un sous-groupe solide de G si et seulement si I est un sous-groupe convexe de G qui est clos par les opérations $\wedge$ et $\vee$.*

PREUVE. Supposons d'abord que G est un sous-groupe convexe de G qui est clos par les opérations $\wedge$ et $\vee$. Soient x, $y \in G$ tels que $|x| \leq |y|$ et $y \in I$. Nous montrons que $x \in I$. Puisque $|y| = y \vee (-y)$, $y \in I$, et I est un sous-groupe stable par $\vee$, $|y|$ appartient à I. Puisque $-|y| \leq x \leq |y|$, $|y| \in I$, et que I est convexe, x appartient à I.

Réciproquement, soit I un sous-groupe solide d'un groupe réticulé G. Soient a, $b \in I$ et soit $c \in G$ tel que $a \leq c \leq b$. On montre que $c \in I$. En utilisant les propriétés élémentaires de la valeur absolue, on obtient

$$-(|a| + |b|) \leq -|a| \leq a \leq c \leq b \leq |b| \leq |a| + |b|,$$

d'où $|c| \leq |a| + |b|$. Mais $|a| + |b|$ est un élément positif de I, d'où $c \in I$.

On montre maintenant que I est stable par $\vee$ et $\wedge$. Soient donc a et b dans I. On a alors

$$-(|a| + |b|) \leq -(|a| \vee |b|) = (-|a|) \wedge (-|b|) \leq a \wedge b \leq a \vee b \leq |a| \vee |b| \leq |a| + |b|,$$

donc $a \wedge b \in I$ et $a \vee b \in I$ puisque $|a| + |b| \in I$ et I est un sous-groupe solide de G. □

L'analogue du Lemme 6.20 échoue pour les parties quelconques (*i.e.*, non nécessairement des sous-groupes) d'un groupe réticulé, comme le montre l'exemple suivant: munissons $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de son ordre usuel, et soit $I = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Alors I est un sous-groupe convexe de G, mais ce n'est pas un sous-groupe solide de G.

Lemme 6.21. *Soit C une partie solide d'un groupe réticulé G. Alors le sous-groupe de G engendré par C est solide.*

Preuve. Si C est vide, le résultat est trivial. Supposons donc C non vide. Soit H la partie de G définie par

$$H = \left\{ x \in G \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\exists_{i<n} x_i \in C \cap G^+) \left(|x| \leq \sum_{i<n} x_i \right) \right\}.$$

Par définition, H est une partie solide de G. Pour tout $x \in C$, $|x| \in C$ car C est solide, donc $x \in H$; d'où $C \subseteq H$. Montrons que H est un sous-groupe de G. Il est immédiat que H est stable par $x \mapsto -x$. Soient maintenant x et y dans H. Il existe donc deux entiers naturels m et n et deux suites finies $(x_i)_{i<m}$ et $(y_j)_{j<n}$ d'éléments de $C \cap G^+$ telles que $|x| \leq \sum_{i<m} x_i$ et $|y| \leq \sum_{j<n} y_j$. Par suite, en utilisant la Proposition 6.17(d), $|x + y| \leq \sum_{i<m} x_i + \sum_{j<n} y_j + \sum_{i<m} x_i$, et donc $x + y \in H$. Ceci montre que H est un sous-groupe de G.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que tout élément de H est une somme d'éléments de C. Soit donc $x \in H$. Par définition, il existe un entier naturel n et une suite finie $(x_i)_{i<n}$ d'éléments de $C \cap G^+$ tels que $|x| \leq \sum_{i<n} x_i$. Par suite, $x^+, x^- \leq \sum_{i<n} x_i$. En appliquant la Proposition 6.9 (propriété de raffinement) puis le Lemme 5.6 (propriété de décomposition de Riesz), on obtient deux suites finies $(x'_i)_{i<n}$ et $(x''_i)_{i<n}$ d'éléments de G^+ telles que $x^+ = \sum_{i<n} x'_i$ et $x^- = \sum_{i<n} x''_i$ et pour tout $i < n$, $0 \leq x'_i, x''_i \leq x_i$. Puisque C est solide et les x_i appartiennent à C, les x'_i et les x''_i appartiennent aussi à C, donc aussi les $-x''_i$ puisque C est solide. Par suite, $x = x^+ - x^- = \sum_{i<n} x'_i + \sum_{i<n}(-x''_{n-i-1})$ est une somme d'éléments de C.

Ainsi, H est le sous-groupe de G engendré par C, d'où la conclusion. □

Notation. Si a est un élément d'un groupe réticulé G, alors nous noterons $G|a$ le sous-groupe solide de G engendré par a.

Il est facile de voir que $G|a = \{x \in G \mid (\exists n \in \mathbb{N})(|x| \leq n|a|)\}$.

Pour le Corollaire suivant, nous renvoyons au Chapitre 3 pour la définition d'une algèbre de Heyting complète.

COROLLAIRE 6.22. *Soit G un groupe réticulé. Alors $(\mathcal{C}(G), \subseteq)$ est une algèbre de Heyting complète (donc, en particulier, un treillis distributif borné).*

PREUVE. Il est immédiat que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes solides de G est un sous-groupe solide de G. Par suite, $(\mathcal{C}(G), \subseteq)$ est un treillis complet, dans lequel la borne inférieure d'une famille est l'intersection de cette famille. Soient donc $A \in \mathcal{C}(G)$ et $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}(G)$, il s'agit de montrer que $A \cap \bigvee \mathcal{X} = \bigvee_{X \in \mathcal{X}}(A \cap X)$. L'inclusion $A \cap \bigvee \mathcal{X} \supseteq \bigvee_{X \in \mathcal{X}}(A \cap X)$ est triviale. Réciproquement, soit a un élément *positif* de $A \cap \bigvee \mathcal{X}$. Puisque, par le Lemme 6.21, $\bigvee \mathcal{X}$ est le sous-groupe engendré par $\bigcup \mathcal{X}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite finie $(a_i)_{i<n}$ d'éléments de $\bigcup \mathcal{X}$ tels que $a = \sum_{i<n} a_i$. Par suite, $0 \leq a \leq \sum_{i<n} |a_i|$ avec les $|a_i|$ dans $\bigcup \mathcal{X}$, donc, en appliquant de nouveau la propriété de décomposition de Riesz, on obtient x_i $(i < n)$ dans G^+ tels que $a = \sum_{i<n} x_i$ et $(\forall i < n)(0 \leq x_i \leq |a_i|)$. Par suite, les x_i sont tous compris entre 0 et a, donc il appartiennent à A; et pour tout $i < n$, il existe $X_i \in \mathcal{X}$ tel que $x_i \in X_i$, d'où $x_i \in A \cap X_i$. Par suite, a appartient à $\bigvee_{X \in \mathcal{X}}(A \cap X)$. Puisque $A \cap \bigvee \mathcal{X}$ est un sous-groupe solide de G, il est engendré par ses éléments positifs, et on en déduit donc finalement l'égalité. □

DÉFINITION. Soit G un groupe réticulé, et soit X une partie de G. La *polaire* de X, notée $X^\perp$, est l'ensemble des éléments g de G tels que $(\forall x \in X)(|g| \perp |x|)$.

Notons que si g appartient à la polaire de X, alors pour tout $x \in X$, $|g| \perp |x|$ (c'est trivial!); donc g appartient à la polaire de la partie solide Y de G engendrée par X. Par suite, par le Corollaire 6.11, g appartient à la polaire du sous-groupe de G engendré par Y, qui est, par le Lemme 6.21, le sous-groupe solide de G engendré par X. Au total, *la polaire de X est égale à la polaire du sous-groupe solide de G engendré par X*. Par suite, en reprenant les notations du Chapitre 3, *les polaires de G sont exactement les éléments "fermés" de l'algèbre de Heyting complète $\mathcal{C}(G)$*. Par suite, d'après la Proposition 3.12, *l'ensemble des polaires de G est une sous-algèbre de Boole de $\mathcal{C}(G)$, et c'est une algèbre de Boole complète.*

Notons aussi qu'un sous-groupe solide I d'un groupe réticulé G n'est pas forcément un sous-groupe *distingué* de G (*voir* l'Exercice 6.4), bien que l'on puisse définir, pour tout $\xi = x+I$ dans G/I et tout y dans G le "translaté" $y+\xi = (y+x)+I$ (indépendant du représentant $x \in \xi$ choisi). Cependant, bien que l'ensemble G/I des classes à gauche de G modulo I ne soit pas nécessairement un groupe, il garde une structure intéressante de treillis:

LEMME 6.23. *Soit I un sous-groupe solide d'un groupe réticulé G. Alors G/I peut être muni d'une relation d'ordre $\leq$ par*

$$x + I \leq y + I \Longleftrightarrow (-y + x)^+ \in I,$$

et cette relation d'ordre munit G/I d'une structure de treillis distributif. De plus, la projection canonique $x \mapsto x + I$ est un homomorphisme surjectif de $(G, \vee, \wedge)$ sur $(G/I, \vee, \wedge)$. Enfin, $\leq$ est "compatible à gauche" sur G/I, dans le sens où pour tous ξ et η dans G/I et pour tout $z \in G$, $\xi \leq \eta$ implique que $z + \xi \leq z + \eta$.

PREUVE. Tout d'abord, on montre que pour tous ξ et η dans G/I, la relation $(-y + x)^+ \in I$ ne dépend pas du couple $(x, y) \in \xi \times \eta$ choisi. Soient donc x et

x' dans ξ et y et y' dans η, et supposons que $(-y+x)^+ \in I$. Par définition, $\xi = x + I = x' + I$ et $\eta = y + I = y' + I$, donc $u = -x + x'$ et $v = -y + y'$ appartiennent à I. Par suite, $-y' + x' = -(y+v) + x + u = -v + (-y+x) + u$, et donc, par le Lemme 6.13(c), $0 \leq (-y'+x')^+ \leq (-v)^+ + (-y+x)^+ + u^+$; mais $(-y+x)^+$ appartient à I, et, par le Lemme 6.20, $(-v)^+$ et u^+ appartiennent à I: par suite, en utilisant la convexité de I, $(-y'+x')^+ \in I$. Ainsi, la définition de $\leq$ sur G/I est cohérente.

On montre alors que $\leq$ est une relation d'ordre sur G/I. Elle est évidemment réflexive (car $0 \in I$). Soient $\xi = x + I$ et $\eta = y + I$ dans G/I tels que $\xi \leq \eta$ et $\eta \leq \xi$. Soit $z = -y + x$. Par définition, z^+ et z^- appartiennent à I, donc aussi $|z| = z^+ + z^-$; par suite, $z \in I$, *i.e.*, $x + I = y + I$, soit $\xi = \eta$: donc $\leq$ est antisymétrique. Soient enfin $\xi = x + I$, $\eta = y + I$ et $\zeta = z + I$ dans G/I tels que $\xi \leq \eta$ et $\eta \leq \zeta$. Par définition, $(-y+x)^+$ et $(-z+y)^+$ appartiennent à I. Mais $0 \leq (-z+x)^+ = ((-z+y) + (-y+x))^+ \leq (-z+y)^+ + (-y+x)^+$ avec $0 \in I$ et $(-z+y)^+ + (-y+x)^+ \in I$, d'où $(-z+x)^+ \in I$ par convexité de I; donc $\xi \leq \zeta$. Ainsi, $\leq$ est une relation d'ordre sur G/I.

Soit alors $\pi\colon G \to G/I,\ x \mapsto x + I$ la projection canonique; il est connu que π est surjective. Si x et y sont deux éléments de G tels que $x \leq y$, alors $(-y+x)^+ = 0 \in I$ donc $\pi(x) \leq \pi(y)$: donc π est croissante. Pour conclure, il suffit donc de montrer que pour tous x et y dans G, $\pi(x \vee y)$ (resp., $\pi(x \wedge y)$) est la borne supérieure (resp., inférieure) de $\{\pi(x), \pi(y)\}$ dans G/I. Tout d'abord, puisque π est croissante, $\pi(x \wedge y) \leq \pi(x), \pi(y) \leq \pi(x \vee y)$. Soit maintenant $\zeta = z + I$ dans G/I. Si $\pi(x), \pi(y) \leq \zeta$, alors $(-z+x)^+$ et $(-z+y)^+$ appartiennent à I, d'où, en revenant à la définition de l'opération $^+$ et en utilisant la stabilité de I par $\vee$, $((-z+x) \vee 0) \vee ((-z+y) \vee 0) \in I$, d'où, les translations de G étant des automorphismes de G, $(-z + (x \vee y))^+ \in I$, ce qui signifie que $\pi(x \vee y) \leq \pi(z) = \zeta$. Par suite, $\pi(x \vee y)$ est bien la borne supérieure de $\{\pi(x), \pi(y)\}$ dans G/I.

Si par contre $\zeta \leq \pi(x), \pi(y)$, alors $(-x+z) \vee 0$ et $(-y+z) \vee 0$ appartiennent à I, d'où, puisque I est stable par $\vee$, $((-x+z) \vee 0) \vee ((-y+z) \vee 0) \in I$, d'où, les translations de G étant des automorphismes de G, $(-(x \wedge y) + z) \vee 0 \in I$, ce qui signifie que $\pi(z) \leq \pi(x \wedge y)$. Par suite, $\pi(x \wedge y)$ est la borne inférieure de $\{\pi(x), \pi(y)\}$ dans G/I.

Ainsi, π est un homomorphisme surjectif de $(G, \vee, \wedge)$ sur $(G/I, \vee, \wedge)$. Puisque $(G, \vee, \wedge)$ est distributif, il s'ensuit immédiatement que $(G/I, \vee, \wedge)$ est distributif.

Enfin, soient $\xi = x + I$ et $\eta = y + I$ dans G/I et z dans G tels que $\xi \leq \eta$, *i.e.*, $(-y+x)^+ \in I$. Alors $(-(z+y) + (z+x))^+ = (-y - z + z + x)^+ = (-y+x)^+ \in I$, d'où, par définition, $z + \xi \leq z + \eta$. Donc $\leq$ est compatible à gauche au sens indiqué ci-dessus. □

Lemme 6.24. *Soit I un sous-groupe solide d'un groupe réticulé G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *I est premier;*
(ii) $(\forall x, y \in G)\big(x \wedge y = 0 \Rightarrow (x \in I$ *ou* $y \in I)\big)$*;*
(iii) *L'ordre naturel sur G/I est total.*

Preuve. (i)⇒(ii) est trivial.

Supposons (ii) réalisé. Soient $\xi = x + I$ et $\eta = y + I$ deux éléments de G/I. Posons $z = -x + y$. Puisque, par le Lemme 6.13(a), $z^+ \wedge z^- = 0$, on obtient, par

l'hypothèse (ii), que $z^+ \in I$ ou $z^- \in I$. Si $z^+ \in I$, alors $\eta \leq \xi$ par définition; si $z^- \in I$, *i.e* $(-z)^+ \in I$, alors $(-y+x)^+ \in I$, donc $\xi \leq \eta$ par définition. Par suite, l'ordre sur G/I est total. Donc (ii)$\Rightarrow$(iii).

Supposons finalement que (iii) soit réalisé. On montre que I est premier. Soient donc x et y dans G tels que $x \wedge y \in I$. Alors $(x+I) \wedge (y+I) = (x \wedge y) + I = I$; mais puisque $\leq$ est un ordre total sur G/I, $(x+I) \wedge (y+I)$ est soit $x+I$, soit $y+I$: par suite, $x+I = I$ ou $y+I = I$, *i.e.*, $x \in I$ ou $y \in I$. $\square$

La définition suivante est fondamentale; elle joue par exemple le même rôle dans la théorie des groupes réticulés que la notion d'ultrafiltre dans la théorie des algèbres de Boole.

Définition. Soit G un groupe réticulé, soit a un élément de G. Un sous-groupe solide I de G est une *valeur* de a quand I est maximal (pour l'inclusion) dans l'ensemble

$$\{J \mid J \text{ est un sous-groupe solide de } G \text{ et } a \notin J\}.$$

Notons que 0 appartient à tout sous-groupe solide de G, il n'a donc "pas de valeur". Par contre, en utilisant le Lemme de Zorn, on obtient le (a) du lemme suivant:

Lemme 6.25. *Soit G un groupe réticulé.*

(a) *Tout élément non nul de G admet une valeur.*
(b) *Toute valeur d'un élément non nul de G est un sous-groupe solide premier de G.*

Notons que la réciproque de (b), en dépit de ce qu'affirment certaines références, est *fausse*, *voir* l'Exercice 7.14 pour un contrexemple.

Preuve. (a) Soit $a \in G \setminus \{0\}$ et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-groupes solides J de G évitant a (*i.e.*, tels que $a \notin J$). Alors $\{0\} \in \mathcal{E}$ et il est facile de vérifier que $(\mathcal{E}, \subseteq)$ est inductif. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ admet un élément maximal, qui est, par définition, une valeur de a.

(b) Soit $a \in G \setminus \{0\}$ et soit I une valeur de a. Soient x et y dans G tels que $x \wedge y = 0$. Supposons que $x \notin I$ et $y \notin I$, et posons $X = G|x$ et $Y = G|y$. Pour tout $z \in X \cap Y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|z| \leq nx$ et $|z| \leq ny$, donc, puisque $nx \perp ny$, $z = 0$: ainsi, $X \cap Y = \{0\}$. Par suite, puisque $\mathcal{C}(G)$ est un treillis distributif (Corollaire 6.22), $I = (X \vee I) \cap (Y \vee I)$. Puisque $x \notin I$ et $y \notin I$, $X \vee I$ et $Y \vee I$ contiennent tous deux strictement I, et donc, puisque I est une valeur de a, $a \in X \vee I$ et $a \in Y \vee I$; par suite, a appartient à l'intersection, qui se trouve être I: une contradiction. $\square$

En particulier, une conséquence immédiate du (a) du Lemme 6.25 est que l'intersection des valeurs des éléments de G est réduite à $\{0\}$. Nous noterons par la suite $\mathcal{R}(G)$ l'ensemble des valeurs des éléments de $G \setminus \{0\}$. Alors $\mathcal{R}(G)$ joue un rôle similaire à celui de l'espace de Stone dans le cas des algèbres de Boole.

Par la suite, si G et H sont deux groupes réticulés, un *ℓ-homomorphisme* $f\colon G \to H$ sera évidemment un homomorphisme de groupes de G vers H tel que pour tous x et y dans G, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ (et donc, par l'identité modulaire, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$) (*voir* l'Exercice 6.11).

Notons que l'analogue du Lemme suivant pour les groupes *ordonnés* n'est pas vrai:

LEMME 6.26. *Soient G et H deux groupes réticulés et soit $f\colon G \to H$ un ℓ-homomorphisme. Alors f est un ℓ-plongement (*i.e.*, un ℓ-isomorphisme sur son image) si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

PREUVE. Si f est un ℓ-plongement, il est trivial que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Puisque f est un ℓ-homomorphisme, il reste à vérifier que pour tous x et y dans G, $f(x) \leq f(y)$ implique que $x \leq y$. Or, si $f(x) \leq f(y)$, alors $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x)$, d'où $f(x \wedge y - x) = 0$, d'où, par hypothèse, $x \wedge y - x = 0$, *i.e.*, $x \leq y$. □

LEMME 6.27. *Soit I un sous-groupe solide premier d'un groupe réticulé G. Alors on peut définir un ℓ-homomorphisme p_I de G vers* $\operatorname{Aut}(G/I)$, *en définissant, pour tout $a \in G$,*

$$p_I(a)\colon G/I \to G/I,\ x + I \mapsto a + x + I,$$

et le noyau de p_I est contenu dans I.

PREUVE. Par le Lemme 6.23, la définition de p_I est cohérente et $p_I(a)$ est une application croissante de G/I vers G/I. Il est facile de vérifier que $p_I(0) = \mathrm{id}_{G/I}$ et $p_I(a + b) = p_I(a) \circ p_I(b)$ pour tous a et b dans G: par suite, pour tout $a \in G$, $p_I(a)$ est un automorphisme de la chaîne $(G/I, \leq)$ (d'inverse $p_I(-a)$). Il est de plus évident que pour tout $a \in G^+$, $p_I(a) \geq \mathrm{id}$: par suite, p_I est un homomorphisme de G vers $\operatorname{Aut}(G/I)$. Il reste à vérifier que c'est un ℓ-homomorphisme. Soient donc a et b dans G, on vérifie que $p_I(a \wedge b) = p_I(a) \wedge p_I(b)$. C'est, en utilisant le Lemme 6.23, un calcul direct: pour tout x dans G, $(p_I(a) \wedge p_I(b))(x + I) = p_I(a)(x+I) \wedge p_I(b)(x+I) = (a+x+I) \wedge (b+x+I) = (a \wedge b)+x+I = p_I(a \wedge b)(x+I)$, d'où $p_I(a \wedge b) = p_I(a) \wedge p_I(b)$.

Finalement, si $a \in \operatorname{Ker} p_I$, alors $a + I = p_I(a)(0_{G/I}) = 0_{G/I} = I$, donc $a \in I$: donc $\operatorname{Ker} p_I \subseteq I$. □

LEMME 6.28. *Soit $(C_i, \leq_i)_{i \in I}$ une famille de chaînes. Alors il existe une chaîne $(C, \leq)$ telle que $\prod_{i \in I} \operatorname{Aut}(C_i, \leq_i)$ se plonge (en tant que groupe réticulé) dans* $\operatorname{Aut}(C, \leq)$.

PREUVE. Soit $C = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times C_i$. L'ordre sur C sera obtenu en mettant les ordres sur les C_i "bout à bout" de la façon suivante: par le théorème de Zermelo, il existe un ordre total (et même un bon ordre) $\preceq$ sur I; on définit une relation binaire $\leq$ sur C en posant

$$(i, x) \leq (j, y) \iff \big(i \prec j \text{ ou } (i = j \text{ et } x \leq_i y)\big).$$

Ainsi, $\leq$ est un ordre de type "lexicographique". Pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ dans $\prod_{i \in I} \operatorname{Aut}(C_i, \leq_i)$, on définit $f = \Phi\big((f_i)_{i \in I}\big)$ en posant $f((i, x)) = (i, f_i(x))$. Il est immédiat que f est un automorphisme de $(C, \leq)$, et que Φ ainsi définie est un ℓ-homomorphisme injectif de $\prod_{i \in I} \operatorname{Aut}(C_i, \leq_i)$ vers $\operatorname{Aut}(C, \leq)$, d'où la conclusion par le Lemme 6.26. □

On peut alors montrer le théorème suivant, qui est l'analogue du théorème de Cayley pour les groupes réticulés. C'est un résultat de Ch. Holland [**Holl**], qui peut par exemple être appliqué à la résolution du *problème des mots* dans les groupes réticulés libres [**HoCl**]:

THÉORÈME 6.29. *Tout groupe réticulé se plonge dans le groupe réticulé des automorphismes d'une chaîne.*

PREUVE. Soit Δ une partie de $\mathcal{R}(G)$ telle que $\bigcap \Delta = \{0\}$ (on peut prendre $\Delta = \mathcal{R}(G)$ lui-même). Définissons q par

$$q\colon G \to \prod_{I\in\Delta} \operatorname{Aut}(G/I), \qquad g \mapsto (p_I(g))_{I\in I}.$$

En utilisant le Lemme 6.27, il est clair que q est un ℓ-homomorphisme; de plus, le noyau de q est contenu dans $\bigcap_{I\in\Delta} \operatorname{Ker} p_I$, donc *a fortiori* dans $\bigcap_{I\in\Delta} I$, *c.à.d.* $\{0\}$. Par suite, q est injectif, et c'est donc (par le Lemme 6.26) un ℓ-plongement. Par le Lemme 6.28, il existe une chaîne T et un plongement Φ du produit $\prod_{I\in\Delta} \operatorname{Aut}(G/I)$ dans $\operatorname{Aut} T$ pour une certaine chaîne T. Alors $p = \Phi \circ q$ est un plongement de G dans $\operatorname{Aut} T$. □

Dans la preuve du Théorème 6.29, la chaîne T est obtenue en considérant un certain ordre lexicographique sur la réunion $\bigcup_{I\in\Delta}\{I\} \times (G/I)$, ce qui permet (en utilisant le degré de liberté sur Δ) de limiter la taille de l'ensemble T—*voir* l'Exercice 6.21.

Exercices du Chapitre 6

EXERCICE 6.1. Trouver un exemple de sup-demi-treillis borné A ayant deux éléments a et b tels que $a \wedge b$ n'existe pas (alors que $a \vee b$ est juste, comme dans tout sup-demi-treillis, $a + b$).

EXERCICE 6.2. Montrer que les automorphismes de $(\mathbb{R}, \leq)$ sont exactement les applications continues strictement croissantes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 6.3. Montrer que l'identité est le seul automorphisme de $(\mathbb{R}, \leq)$ tel que $f^3 = \mathrm{id}$ (f^3 est bien entendu $f \circ f \circ f$).

EXERCICE 6.4. Soit G le groupe réticulé des automorphismes de $([0, 1], \leq)$.

(a) Montrer qu'il existe $f > \mathrm{id}$ et g dans G tels que $f \wedge (g \circ f \circ g^{-1}) = \mathrm{id}$.
(b) Montrer qu'il existe un sous-groupe solide non distingué dans G.

EXERCICE 6.5. Montrer qu'un groupe réticulé G satisfait l'*inégalité triangulaire* $|a + b| \leq |a| + |b|$ pour tous éléments a et b si et seulement si G est abélien. (***Indication:*** un sens de l'implication est fourni par la Proposition 6.17. Si G satisfait l'inégalité triangulaire, alors, pour a et b dans G^+, noter que $|a + b| = |-b - a|$).

EXERCICE 6.6. Montrer que le groupe additif des applications *dérivables* de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, ordonné naturellement, n'est *pas* un groupe réticulé.

EXERCICE 6.7. Montrer que même dans un groupe réticulé abélien, $x < x'$ et $y < y'$ n'entraîne *pas* que $x \vee y < x' \vee y'$.

EXERCICE 6.8. Montrer que tout groupe réticulé archimédien est intégralement clos.

EXERCICE 6.9. * On considère le groupe réticulé $G = \operatorname{Aut}(\mathbb{R}, \leq)$ donné par la Proposition 6.17. Nous allons étudier quelques propriétés de G.

(a) Soit n un entier naturel non nul et soit p une application *dérivable* de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, *périodique* de période 1 (et rien de plus petit!) telle que $(\forall x \in \mathbb{R})(|p'(x)| \leq 1/2)$. On définit deux applications f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big(f(x) = x + p(x) \text{ et } g(x) = x + 1/n\big).$$

Montrer que f et g appartiennent à G, que $n(-f+g+f) = ng$ (en notant $+$ la loi du groupe G), mais que $-f+g+f \neq g$.

(b) On définit deux éléments ϕ et ψ de G de la façon suivante: ce sont des applications continues et affines par morceaux; ϕ est affine sur chacun des intervalles $[0,\, 3/8]$ et $[3/8,\, 1]$, et $\phi(3/8) = 3/4$; ψ est affine sur chacun des intervalles $[0,\, 1/4]$, $[1/4,\, 5/16]$, $[5/16,\, 3/4]$ et $[3/4,\, 1]$ et $\psi(1/4) = 1/4$, $\psi(5/16) = 11/16$ et $\psi(3/4) = 3/4$; puis on prolonge ϕ et ψ en posant $\phi(x+1) = \phi(x) + 1$ et $\psi(x+1) = \psi(x) + 1$ pour tout réel x.

Montrer que $\mathrm{id} < \psi \circ \psi < \phi \circ \phi$ mais que $\psi \not\leq \phi$.

Il est à noter que G est un groupe réticulé non commutatif, donc, si l'on admet le théorème d'Iwasawa à venir, non intégralement clos, donc, puisque G est un groupe réticulé, G est non archimédien.

Exercice 6.10. * Soit G le groupe réticulé des automorphismes de $([0,\, 1], \leq)$. Une application $f\colon [0,\, 1] \to \mathbb{C}$ est dite *analytique* quand f est la restriction à $[0,\, 1]$ d'une fonction analytique (*i.e.*, holomorphe) sur un voisinage de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{C}$. Soit G_1 le sous-ensemble de G défini par

$$G_1 = \{f \in G \mid f \text{ est analytique et } (\forall x \in [0,\, 1])(f'(x) > 0)\}.$$

(a) Soit $f\colon [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ une fonction polynomiale bijective telle que

$$(\forall x \in [0,\, 1])(f'(x) > 0).$$

Montrer que $f \in G_1$.

(b) Montrer que G_1 est dense dans G pour la norme de la convergence uniforme sur $[0,\, 1]$ (***Indication:*** on pourra d'abord approximer les éléments de G par des fonctions de classe C^1 de dérivée strictement positive, puis approximer les dérivées en question par des polynômes strictement positifs, puis multiplier ces derniers par une constante proche de 1 afin d'ajuster à 1 la valeur de $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$).

(c) En utilisant (b) et l'Exercice 6.9, montrer qu'il existe ϕ et ψ dans G_1 telles que $\mathrm{id} < \psi \circ \psi < \phi \circ \phi$ mais $\psi \not\leq \phi$.

(d) Montrer que G_1 est un sous-groupe dirigé de G.

(e) Pour tout $f \in G$ tel que $f \geq \mathrm{id}$, on définit

$$\bar{f}\colon [0,\, 1] \to [0,\, 1],\ x \mapsto \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^n(x).$$

Montrer que $\bar{f}(x)$ est le plus petit $y \geq x$ tel que $f(y) = y$. Montrer sur un exemple que $\bar{f}$ n'est pas nécessairement continue.

(f) Soit $f \in G_1$ tel que $f \not\leq \mathrm{id}$ et soit a la borne supérieure des éléments x de $[0,\, 1]$ tels que $(\forall y \leq x)(f^+(y) = y)$. Montrer que $f^+(a) = a$ et qu'il existe $b > a$ dans $[0,\, 1]$ tel que $(\forall x \in\,]a,\, b[)(f(x) > x)$ (***Indication:*** on rappelle que deux fonctions holomorphes définies sur un ouvert borné connexe égales en un nombre infini de points sont égales partout).

(g) Montrer que G_1 est archimédien.

Ceci nous fournit donc un exemple de groupe dirigé et archimédien, mais non commutatif.

Exercice 6.11. Soit $G = \mathbf{C}([0,\,1])$ le groupe réticulé des applications continues de $[0,\,1]$ vers $\mathbb{R}$. On considère l'application $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ définie par

$$(\forall f \in G)\left(\varphi(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Montrer que φ est un homomorphisme de groupes ordonnés mais pas un ℓ-homomorphisme.

Exercice 6.12. Donner des exemples d'ensembles ordonnés finis P et Q tels que:

(i) P a trois éléments, P est non totalement ordonné, et $\operatorname{Aut} P = \{\mathrm{id}_P\}$;
(ii) P a deux éléments et $\operatorname{Aut} P$ n'est pas réticulé.

Exercice 6.13. Soient G et H deux groupes ordonnés non triviaux. Montrer que le produit lexicographique $G \times_{\mathrm{lex}} H$ est réticulé si et seulement si G est totalement ordonné et H est réticulé.

Exercice 6.14. Soit G un groupe réticulé, soit a un élément de G. Montrer que les valeurs de a sont exactement les valeurs de $|a|$, mais pas forcément celles de a^+ ou de a^-. Montrer cependant que si on note, pour tout $x \in G$, $\operatorname{val}(x)$ l'ensemble des valeurs de x, alors $\operatorname{val}(a)$ est la réunion disjointe de $\operatorname{val}(a^+)$ et de $\operatorname{val}(a^-)$.

Exercice 6.15. Montrer que si S est un sous-semi-groupe d'un groupe réticulé G, alors il existe un plus grand sous-groupe solide H de G tel que $H \subseteq S$.

Exercice 6.16. Soit G un groupe réticulé et soit I un sous-groupe de G. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) I est un sous-groupe solide premier de G;
(ii) Pour tous sous-groupes solides A et B de G, $A \cap B \subseteq I$ implique que $A \subseteq I$ ou $B \subseteq I$;
(iii) Pour tous sous-groupes solides A et B de G, $A \cap B = I$ implique que $A = I$ ou $B = I$;
(iv) L'ensemble des sous-groupes solides de G contenant I est totalement ordonné par inclusion.

Exercice 6.17. Soit G un groupe réticulé. On dit qu'un sous-groupe solide I de G est *régulier* quand pour tout ensemble $\mathcal{X}$ de sous-groupes solides de G, $\bigcap \mathcal{X} = I$ implique que $I \in \mathcal{X}$.

Montrer qu'un sous-groupe solide I de G est régulier si et seulement si $I = G$ ou bien il existe $a \in G \setminus \{0\}$ tel que I est une valeur de a.

Exercice 6.18. Soit I un sous-groupe solide premier d'un groupe réticulé G et soit p_I le ℓ-homomorphisme canonique de G vers $\operatorname{Aut}(G/I)$. Montrer que le noyau de p_I est égal à $\bigcap_{x \in G}(x + I - x)$.

Exercice 6.19. Soit G l'ensemble des éléments f de $\mathbf{C}([0,\,1])$ qui sont des *fonctions affines*, *i.e.*, telles qu'il existe deux réels a et b tels que $(\forall x \in [0,\,1])(f(x) = ax+b)$. Munissons G de la structure de groupe ordonné induite de celle de $\mathbf{C}([0,\,1])$.

(a) Montrer que G est un groupe réticulé.
(b) Soit $f\colon x \mapsto x - 1/2$. Montrer que $f \vee 0$ n'est pas le même dans $\mathbf{C}([0,\,1])$ que dans G. En déduire que G n'est pas un ℓ-sous-groupe de $\mathbf{C}([0,\,1])$.

Exercice 6.20. Munissons $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$ de leur ordre naturel, et soit $\varphi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, x + y)$. Montrer que φ est un plongement de groupes ordonnés mais pas un ℓ-homomorphisme.

Exercice 6.21. Montrer que tout groupe réticulé *dénombrable* se plonge dans $\operatorname{Aut} T$ pour une certaine chaîne *dénombrable* T.

Exercice 6.22. Soit I un sous-groupe solide d'un groupe réticulé G. Montrer que tout élément positif (*i.e.*, plus grand que $0_{G/I}$ pour l'ordre naturel) de G/I est de la forme $x + I$ où $x \in G^+$.

CHAPITRE 7

Groupes réticulés représentables; groupes totalement ordonnés

Nous allons nous concentrer dans ce chapitre sur les *décompositions* des groupes réticulés; l'objectif de base est d'essayer de plonger un groupe réticulé dans un produit de groupes totalement ordonnés, mais ceci n'est pas possible pour tous les groupes réticulés (un contrexemple étant, encore et toujours, le groupe réticulé des automorphismes de $[0, 1]$). L'analogue pour les groupes réticulés de la notion de sous-groupe distingué pour les groupes est la suivante:

Définition. Soit G un groupe réticulé. Un *ℓ-idéal* de G est un sous-groupe solide *distingué* de G. Nous noterons $\mathcal{L}(G)$ l'ensemble des ℓ-idéaux de G. C'est donc une partie de $\mathcal{C}(G)$ (et si G est abélien, alors $\mathcal{L}(G) = \mathcal{C}(G)$).

Voir à ce sujet l'Exercice 7.10.

Nous avons vu au Chapitre 6 (Lemme 6.23) que si I est un sous-groupe solide d'un groupe réticulé G, alors G/I est muni d'une structure naturelle de *treillis*. Dans le cas d'un ℓ-idéal, cette structure s'enrichit de la structure de groupe, et les deux sont compatibles, ce qui fournit l'analogue pour les groupes réticulés du *premier théorème d'isomorphisme*:

Théorème 7.1.

(a) *Soit I un ℓ-idéal d'un groupe réticulé G. Alors G/I, muni de ses structures naturelles de groupe et d'ensemble ordonné, est un groupe réticulé, et la projection canonique de G sur G/I est un ℓ-homomorphisme surjectif, envoyant G^+ sur $(G/I)^+$.*

(b) *Soit $f\colon G \to H$ un ℓ-homomorphisme de groupes réticulés. Alors* $\operatorname{Ker} f$ *est un ℓ-idéal de G, et f induit un ℓ-isomorphisme de $G/\operatorname{Ker} f$ sur* $\operatorname{Im} f$.

Preuve. (a) Tout ce qu'il reste à faire est de montrer que l'ordre sur G/I est compatible avec la structure de groupe. Soient donc $\xi = x + I$, $\eta = y + I$, et $\zeta = z + I$ trois éléments de G/I tels que $\xi \leq \eta$; on montre que $\zeta + \xi \leq \zeta + \eta$ et $\xi + \zeta \leq \eta + \zeta$. Il s'agit de montrer respectivement que $(-(z + y) + z + x)^+ \in I$ et que $(-(y + z) + x + z)^+ \in I$. La première assertion résulte du Lemme 6.23. Pour la seconde assertion, notons que $\tau\colon t \mapsto -z + t + z$ est un ℓ-automorphisme (intérieur) de G, d'où $(-(y+z)+x+z)^+ = (-z-y+x+z)^+ = (\tau(-y+x))^+ = \tau((-y+x)^+)$; mais $(-y + x)^+ \in I$ et I est distingué dans G, d'où $\tau((-y + x)^+) \in I$. Le fait que la projection canonique de G sur G/I soit un ℓ-homomorphisme surjectif résulte du résultat correspondant sur les groupes et du Lemme 6.23. Enfin, si $\xi = x + I$ appartient à $(G/I)^+$, alors, par définition, x^- appartient à I, donc $\xi = x + I = (x^+ - x^-) + I = x^+ + I$ appartient à l'image de G^+ par la projection canonique. Ceci conclut la preuve de (a).

(b) Soit $I = \operatorname{Ker} f$. Puisque f est un homomorphisme de groupes, I est un sous-groupe distingué de G. Si $x \in G$ et $y \in I$ et $|x| \leq |y|$, alors $|f(x)| = f(|x|) \leq f(|y|) = |f(y)| = 0$, d'où $f(x) = 0$, d'où $x \in I$. Par suite, I est ℓ-idéal de G. Puisque I est un sous-groupe distingué de G, f induit un homomorphisme de groupes g de G/I vers H. Il résulte de la théorie des groupes élémentaire que g est injectif, c'est en fait un isomorphisme de groupes de G/I sur $\operatorname{Im} f$. De plus, par le Lemme 6.23, pour tous $\xi = x + I$ et $\eta = y + I$ dans G/I, $g(\xi \vee \eta) = g((x \vee y) + I) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, et *idem* pour $\wedge$. Par suite, g est un ℓ-homomorphisme. En particulier, $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe réticulé de H et g est un ℓ-isomorphisme de G/I sur $\operatorname{Im} f$. □

On montre alors, en utilisant le résultat correspondant en théorie des groupes, la Proposition suivante:

PROPOSITION 7.2. *Soit I un ℓ-idéal d'un groupe réticulé G et soit $p\colon G \to G/I$ la projection canonique. Alors $\boldsymbol{J} \mapsto p^{-1}[\boldsymbol{J}]$ établit un isomomorphisme de treillis du treillis des sous-groupes solides (resp., ℓ-idéaux) de G/I sur le treillis des sous-groupes solides (resp., ℓ-idéaux) de G contenant I, d'inverse $J \mapsto p[J]$.*

PREUVE. Soit $\mathcal{E}$ (resp., $\mathcal{E}'$) le treillis des sous-groupes de G/I (resp., des sous-groupes de G contenant I). Il est connu que $\phi\colon \boldsymbol{J} \mapsto p^{-1}[\boldsymbol{J}]$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$, d'inverse $\psi\colon J \mapsto p[J]$, et que les deux bijections échangent les sous-groupes distingués de part et d'autre. De plus, puisqu'elles sont évidemment croissantes (pour l'inclusion), ce sont des isomorphismes de treillis. Donc tout ce qu'il reste à montrer est qu'elles envoient les sous-groupes solides sur les sous-groupes solides.

Si $\boldsymbol{J}$ est un sous-groupe solide de G/I et $J = \phi[\boldsymbol{J}]$, montrons que J est solide. Soient donc $x \in G$ et $y \in J$ tels que $|x| \leq |y|$. Par suite, $|p(x)| = p(|x|) \leq p(|y|) = |p(y)|$; mais, par définition de J, $p(y) \in \boldsymbol{J}$, donc, $\boldsymbol{J}$ étant solide, $p(x) \in \boldsymbol{J}$, *i.e.*, $x \in J$. Donc l'image par ϕ de tout sous-groupe solide de G/I est un sous-groupe solide de G (contenant I).

Réciproquement, soit J un sous-groupe solide de G contenant I et soit $\boldsymbol{J} = p[J]$, montrons que $\boldsymbol{J}$ est solide. Soient donc $\xi \in G/I$ et $\eta \in \boldsymbol{J}$ tels que $|\xi| \leq |\eta|$. Par définition de $\boldsymbol{J}$, il existe $y \in J$ tel que $\eta = y + I$. Soit $x \in G$ tel que $\xi = x + I$. Alors $|x| + I = |x + I| \leq |y + I| = |y| + I$, donc $z = (-|y| + |x|)^+$ appartient à I. Puisque $|x| \leq |y| + z$ et que $|y| \in J$ et que $z \in I \subseteq J$, $|y| + z \in J$, et donc, J étant solide, $x \in J$: par suite, $\xi \in \boldsymbol{J}$. Par suite, l'image par ψ de tout sous-groupe solide de G contenant I est un sous-groupe solide de G/I. □

La définition suivante est la version dans le cas particulier des groupes réticulés d'une définition très générale.

DÉFINITION. Soit G un groupe réticulé. Une *décomposition sous-directe* de G est un ℓ-plongement

$$f\colon G \to \prod_{i \in I} G_i,\ x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$$

où les G_i sont des groupes réticulés, tel que pour tout $i \in I$, $f_i[G] = G_i$, et on dit alors que G est un *produit sous-direct* de la famille $(G_i)_{i \in I}$. On dit que G est *sous-directement irréductible* quand pour toute décomposition sous-directe comme ci-dessus, il existe $i \in I$ tel que f_i soit un ℓ-isomorphisme.

En remplaçant au besoin G_i par $f_i[G]$, on voit donc que G est sous-directement irréductible si et seulement si pour toute famille de groupes réticulés $(G_i)_{i\in I}$ et tout ℓ-plongement $f\colon G \to \prod_{i\in I} G_i,\ x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$, il existe $i \in I$ tel que f_i soit un ℓ-plongement.

Le lemme suivant est un cas particulier (pour les groupes réticulés) d'un fait très général (de démonstration similaire!) où l'on parle de *congruence* plutôt que de ℓ-idéal.

Lemme 7.3. *Soit G un groupe réticulé. Alors G est sous-directement irréductible si et seulement si il existe un plus petit (pour l'inclusion) ℓ-idéal non nul de G.*

Par suite, G est sous-directement réductible si et seulement si l'intersection de tous les ℓ-idéaux non nuls de G est réduite à $\{0\}$.

Preuve. Soit $\Delta = \mathcal{L}(G) \setminus \{\{0\}\}$ et soit ϕ l'application de G vers $\prod_{I\in\Delta}(G/I)$ définie par $\phi(x) = (x+I)_{I\in\Delta}$. Il résulte du Théorème 7.1 que ϕ est un ℓ-homomorphisme.

Si l'intersection des éléments de Δ est réduite à $\{0\}$, alors ϕ est un ℓ-plongement; dans ce cas, si G était sous-directement irréductible, il existerait $I \in \Delta$ tel que la projection canonique de G sur G/I est un ℓ-plongement, ce qui est absurde puisque $I \neq \{0\}$: donc G est sous-directement réductible.

Réciproquement, supposons que l'intersection des éléments de Δ ne soit pas réduite à $\{0\}$ et appelons-la I. Montrons que G est sous-directement irréductible. Soit donc $f\colon G \to \prod_{j\in J} G_j,\ x \mapsto (f_j(x))_{j\in J}$ une décomposition sous-directe de G. Le fait que f soit un ℓ-plongement implique que $\bigcap_{j\in J} \operatorname{Ker} f_j = \{0\}$. Si pour tout $j \in J$, $\operatorname{Ker} f_j \neq \{0\}$, alors, par définition de I, $\operatorname{Ker} f_j$ contient I pour tout j, ce qui contredit le fait que $\bigcap_{j\in J} \operatorname{Ker} f_j = \{0\}$. Par suite, il existe $j \in J$ tel que $\operatorname{Ker} f_j = \{0\}$, *i.e.*, f_j est un ℓ-plongement. □

Une fois de plus, l'analogue du résultat suivant est valable dans un contexte très général, avec une preuve similaire:

Proposition 7.4. *Tout groupe réticulé est un produit sous-direct de groupes réticulés sous-directement irréductibles.*

Preuve. Soit G un groupe réticulé. Pour tout $g \in G \setminus \{0\}$, l'ensemble des ℓ-idéaux de G qui évitent g, ordonné par inclusion, est évidemment non vide ($\{0\}$ lui appartient) et inductif, il admet donc, d'après le Lemme de Zorn, un élément maximal. Notons $\mathbf{V}(g)$ l'ensemble de ces éléments maximaux; nous venons donc de montrer que $\mathbf{V}(g) \neq \varnothing$. Puis soit $V = \bigcup_{g\in G\setminus\{0\}} \mathbf{V}(g)$. Puisque pour tout élément g de $G \setminus \{0\}$, il existe un élément de V qui évite g, $\bigcap V$ est égal à $\{0\}$. Soit $I \in V$; par définition, il existe $g \in G \setminus \{0\}$ tel que $I \in \mathbf{V}(g)$. Alors pour tout ℓ-idéal de G contenant strictement I, g appartient à I par maximalité de I; par suite, par la Proposition 7.2, il existe un plus petit ℓ-idéal non nul de G/I, qui est le ℓ-idéal de G/I engendré par $g + I$. Par le Lemme 7.3, il en résulte que G/I est sous-directement irréductible. Enfin, l'homomorphisme canonique de G vers $\prod_{I\in V}(G/I)$ (défini par $x \mapsto (x+I)_{I\in V}$) est un ℓ-plongement (car l'intersection des éléments de V est $\{0\}$), dont pour tout $I \in V$ la "Iième composante" $x \mapsto x + I$ est un ℓ-homomorphisme surjectif: c'est donc une décomposition sous-directe de G. □

Comme annoncé au début de ce chapitre, l'un de nos buts essentiels ici est de voir quels groupes réticulés peuvent se plonger dans un produit de groupes totalement ordonnés. Quelques définitions d'abord:

DÉFINITION. Un groupe réticulé est *représentable* quand il est ℓ-isomorphe à un sous-groupe réticulé d'un produit de groupes totalement ordonnés.

De façon équivalente, les groupes réticulés représentables sont exactement les produits sous-directs de groupes totalement ordonnés.

De façon imagée, aux éléments d'un groupe réticulé représentable peuvent être associées des *coordonnées*, qui vivent non pas dans $\mathbb{R}$ (ce n'est pas toujours possible, même dans le cas archimédien, *voir* les Exercices 7.5 et 7.6) mais dans divers groupes totalement ordonnés.

On obtient alors diverses conditions équivalentes à la représentabilité; ce résultat est essentiellement dû à P. Lorenzen:

THÉORÈME 7.5. *Soit G un groupe réticulé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *G est représentable;*
(ii) *G satisfait l'identité $(2x) \wedge (2y) = 2(x \wedge y)$;*
(iii) *G satisfait l'identité $x \wedge (y - x - y) \leq 0$;*
(iv) *G satisfait l'identité $x^+ \wedge (y + x^- - y) = 0$;*
(v) *l'implication $x \wedge y = 0 \Rightarrow x \wedge (z + y - z) = 0$ est valide pour tous x, y, $z \in G$;*
(vi) *toute polaire de G est un sous-groupe distingué de G;*
(vii) *l'implication $x \wedge (y + x - y) = 0 \Rightarrow x = 0$ est valide pour tous x, $y \in G$.*

PREUVE. (i)$\Rightarrow$(ii) Il suffit de vérifier que (ii) est satisfait par tout groupe totalement ordonné; c'est immédiat.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Supposons que G satisfait (ii). Alors pour tous x et y dans G, $(2x) \wedge (2y) = 2(x \wedge y) \leq x + y$; donc pour tous x et y dans G, on obtient $(2(-y + x)) \wedge (2(-y)) \leq -y + x - y$, d'où, en ajoutant à gauche $y - x + y$ membre à membre, $x \wedge (y - x - y) \leq 0$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) L'identité (iii) peut également s'écrire $(x \wedge (y - x - y)) \vee 0 = 0$, soit, en développant, $(x \vee 0) \wedge (y + (-x) \vee 0 - y) = 0$, ce qui est exactement (iv).

(iv)$\Rightarrow$(v) Si G satisfait (iv), soient x, y et z dans G tels que $x \wedge y = 0$. Soit $t = x - y$. Alors $t^+ = x$ et $t^- = y$ (Lemme 6.13(b)), donc, par hypothèse, $t^+ \wedge (z + t^- - z) = 0$, soit $x \wedge (z + y - z) = 0$.

(v)$\Rightarrow$(iv) est trivial, car $x^+ \wedge x^- = 0$.

(v) est évidemment équivalent au fait que pour tout $x \in G$, la polaire de $\{x\}$ (*polaire principale*) est une partie distinguée de G; puisque les polaires de G sont évidemment les intersections de polaires principales de G, il en résulte immédiatement l'équivalence entre (v) et (vi).

(v)$\Rightarrow$(vii) Supposons que G satisfait (v). Soient x et y dans G tels que $x \wedge (y + x - y) = 0$. Posons $z = y + x - y$. Alors $x \wedge z = 0$, d'où, par (v), $x \wedge (-y + z + y) = 0$, *i.e.*, $x \wedge x = 0$, soit $x = 0$.

(vii)$\Rightarrow$(v) Supposons que G satisfait (vii). Soient x, y, et z tels que $x \wedge y = 0$. Soit $t = x \wedge (z + y - z)$. Alors $x \geq 0$ et $y \geq 0$, donc $t \geq 0$; par ailleurs, $t \wedge (-z + t + z) \leq x \wedge y = 0$: par (vii), $t = 0$; d'où (v).

Ainsi, (v), (vi), et (vii) sont équivalents.

(iv)⇒(i) Supposons que G satisfait (iv). Par la Proposition 7.4, G admet une décomposition sous-directe

$$f\colon G \to \prod_{i\in I} G_i,\ x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$$

dans laquelle tous les G_i sont sous-directement irréductibles. Pour tout $i \in I$, f_i est un ℓ-homomorphisme surjectif de G sur G_i et G satisfait l'identité (iv), donc G_i satisfait également (iv) (***Note:*** *un tel raisonnement est immédiat pour* (ii), (iii) *et* (iv), *mais pas pour* (v), (vii), *qui comportent chacun une implication, où une preuve serait nécessaire*). Il suffit donc de prouver l'assertion suivante:

> *Tout groupe réticulé sous-directement irréductible satisfaisant* (iv) *est totalement ordonné.*

Soit donc G un groupe réticulé sous-directement irréductible satisfaisant (iv). On a vu que (iv) implique (v), donc G satisfait (v). Soit $a \in G$, on montre que $a^+ = 0$ ou $a^- = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit A (resp., B) l'ensemble des conjugués des éléments de $G|a^+$ (resp., $G|a^-$). Puisque tout élément de $G|a^+$ est orthogonal en valeur absolue à tout élément de $G|a^-$, il vient facilement, en utilisant (v), que tout élément de A est orthogonal en valeur absolue à tout élément de B. Soit A' (resp., B') le sous-groupe de G engendré par A (resp., B). Puisque A et B sont deux parties distinguées de G, A', et B' sont deux sous-groupes distingués de G. Puisque $G|a^+$ et $G|a^-$ sont solides, A et B sont solides, donc, par le Lemme 6.21, A' et B' sont solides. Enfin, puisque tout élément de A est orthogonal en valeur absolue à tout élément de B, on obtient, en utilisant le Corollaire 6.11, que tout élément de A' est orthogonal en valeur absolue à tout élément de B'. Ainsi, A' et B' sont deux ℓ-idéaux de G et $A' \cap B' = \{0\}$. Puisque $a^+ \in A'$ et $a^- \in B'$ et que a^+ et a^- sont non nuls, A' et B' contiennent le plus petit ℓ-idéal non nul de G: une contradiction. Ainsi, $a^+ = 0$ ou $a^- = 0$.

En appliquant ceci à $a = -y + x$ (x, y éléments quelconques de G), on obtient $x \le y$ ou $y \le x$: donc G est totalement ordonné. □

Les groupes réticulés abéliens satisfaisant trivialement (v), on obtient immédiatement le Corollaire suivant:

Corollaire 7.6. *Tout groupe réticulé commutatif est représentable.*

Par suite, tout groupe réticulé commutatif est un produit sous-direct de groupes totalement ordonnés G_i ($i \in I$); puisque chacun des G_i est image homomorphe de G, il est également commutatif. Dans le cas non commutatif, il existe beaucoup de groupes réticulés non représentables (*voir* l'Exercice 7.3, ou encore l'Exercice 6.9).

Que dire alors des groupes totalement ordonnés—leur structure est-elle "totalement connue"? C'est en fait loin d'être le cas. Voici quelques résultats de base les concernant.

Notation. Pour tout groupe totalement ordonné G, nous noterons

$$G^{++} = G^+ \setminus \{0\}.$$

Théorème 7.7 (Théorème de Hölder). *Tout groupe totalement ordonné archimédien est commutatif, et isomorphe à un sous-groupe ordonné de* $(\mathbb{R}, +, \le)$.

Preuve. Soit G un groupe totalement ordonné archimédien, non réduit à $\{0\}$. Supposons d'abord que G^{++} admet un plus petit élément, disons u. Soit $\phi\colon \mathbb{Z} \to G,\ n \mapsto nu$. Puisque u est strictement positif, il est immédiat que ϕ est un plongement de groupes ordonnés de $\mathbb{Z}$ dans G. Pour montrer que ϕ est surjectif, il suffit, puisque G est engendré par G^+, de montrer que l'image de ϕ contient G^+. Soit donc $g \in G^+$. Si une infinité d'entiers naturels n satisfont $nu \leq g$, alors, puisque $u \geq 0$, il vient $u \ll g$, donc $u = 0$ puisque G est archimédien, une contradiction; par suite, il existe un *plus grand* entier naturel n tel que $nu \leq g$. Puisque G est totalement ordonné, il vient $g < (n+1)u$, et par suite $0 \leq g - nu < u$, d'où $g = nu$ par définition de u, ce qui montre la surjectivité de ϕ. Par suite, ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur G.

Il reste donc à voir le cas où G^{++} n'admet pas de plus petit élément. On montre alors le Fait suivant:

Fait 1. *G^{++} satisfait l'énoncé suivant:*

$$(\forall x)(\exists y)(2y \leq x).$$

Preuve du Fait. Soit $x \in G^{++}$. Par hypothèse, il existe $z \in G^{++}$ tel que $0 < z < x$. Soit alors $y = \min\{z, -z + x\}$. Alors $y \in G^{++}$ et $2y \leq z + (-z + x) = x$. $\square$ Fait 1.

Fait 2. *Pour tout $x \in G$ et tout $y \in G^{++}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leq x < (n+1)y$.*

Preuve du Fait. Soit $X = \{m \in \mathbb{Z} \mid my \leq x\}$. Puisque $y \geq 0$, X est un segment initial de $(\mathbb{Z}, \leq)$, et, puisque G est archimédien, totalement ordonné et que $y \neq 0$, $X \neq \varnothing$ et $X \neq \mathbb{Z}$: par suite, il existe un unique entier relatif n tel que $X = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq n\}$. $\square$ Fait 2.

Soient alors a et b dans G, soit $c = |a + b - a - b|$ et supposons que c soit strictement positif. Par le Fait 1 appliqué deux fois de suite, il existe $d \in G^{++}$ tel que $4d \leq c$. Par le Fait 2, il existe deux entiers m et n tels que $md \leq a < (m+1)d$ et $nd \leq b < (n+1)d$. Par suite, on obtient $a+b-a-b \leq (m+1)d+(n+1)d-md-nd \leq 2d$, et, de même, $a+b-a-b \geq -2d$: d'où $c = |a+b-a-b| \leq 2d$, une contradiction.

Par suite, G est commutatif. Montrons alors que G se plonge dans $\mathbb{R}$. Fixons-nous un élément quelconque u de G^{++}. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in G$, notons $ru \leq x$ l'énoncé

"il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $r = p/q$ et $pu \leq qx$".

En fait, puisque G est commutatif et totalement ordonné, il est non perforé (Proposition 5.19), et il est alors facile de voir que $pu \leq qx$ est *indépendant* du couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ choisi tel que $r = p/q$. En particulier, la notation $ru \leq x$ pour $r \in \mathbb{Z}$ n'est pas ambiguë. Il est alors facile de voir que pour tout $x \in G$, l'ensemble

$$L(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid ru \leq x\}$$

est un segment initial de $(\mathbb{Q}, \leq)$, différent de $\varnothing$ et de $\mathbb{Q}$ (comme dans la preuve du Fait 2). Définissons alors $\psi\colon G \to \mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in G)\left(\psi(x) = \bigvee L(x)\right).$$

Il est facile de vérifier que ψ est croissante et que $\psi(0) = 0$. Il est moins évident que ψ est un homomorphisme additif. Soient donc a et b dans G et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il

existe deux entiers p et q tels que $p/n < \psi(a) < (p+2)/n$ et $q/n < \psi(b) < (q+2)/n$. Puisque $L(a)$ et $L(b)$ sont deux segments initiaux de $(\mathbb{Q}, \leq)$, $p/n \in L(a)$ et $q/n \in L(b)$, et donc $pu \leq na < (p+2)u$ et $qu \leq nb < (q+2)u$. Par suite, $(p+q)u \leq n(a+b) < (p+q+4)u$. Il en résulte que $\psi(a)+\psi(b)-4/n < (p+q)/n \leq \psi(a+b)$ et que $\psi(a+b) < (p+q+4)/n \leq \psi(a)+\psi(b)+4/n$; en faisant tendre n vers l'infini, on obtient donc $\psi(a+b) = \psi(a)+\psi(b)$. Donc ψ est un homomorphisme additif.

Il reste à vérifier que ψ est un plongement d'ensemble ordonnés (sachant que ψ est croissante). Soit donc $a \in G$ tel que $\psi(a) \geq 0$. On montre que $a \geq 0$. Sinon, puisque G est totalement ordonné, $a < 0$ et donc, G étant archimédien totalement ordonné, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u < n(-a)$; par suite, $1 = \psi(u) \leq -n\psi(a)$, une contradiction. □

Il est à noter qu'il existe des groupes réticulés représentables (et même *commutatifs*!) archimédiens qui ne se plongent dans aucune puissance de $(\mathbb{R}, +, \leq)$ (*voir* par exemple les Exercices 7.5 et 7.6).

LEMME 7.8. *Tout groupe totalement ordonné satisfait l'énoncé suivant:*

$$(\forall x, y, z)\big((x \ll z \text{ et } y \ll z) \Rightarrow x+y \ll z\big).$$

PREUVE. Soient x, y, et z trois éléments d'un groupe totalement ordonné G tels que $x \ll z$ et $y \ll z$. Supposons d'abord que $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Puisque G est totalement ordonné, x et y sont comparables. Si $x \leq y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(x+y) \leq 2ny \leq z$: d'où $x+y \ll z$. Si $y \leq x$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(x+y) \leq 2nx \leq z$: donc, de nouveau, $x+y \ll z$.

Dans le cas général, $x \ll z$ (resp., $y \ll z$) équivaut à $|x| \ll z$ (resp., $|y| \ll z$); donc, par ce qui précède, $|x|+|y|+|x| \ll z$, d'où, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(x+y) \leq |n| \cdot |x+y| \leq |n|(|x|+|y|+|x|) \leq z$, donc $x+y \ll z$. □

LEMME 7.9. *Soit G un groupe totalement ordonné. Alors l'ensemble des parties solides de G est totalement ordonné par inclusion.*

PREUVE. Soient A et B deux parties solides de G, il s'agit de montrer que $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$. Supposons que $B \not\subseteq A$. Alors il existe un élément b de $B \setminus A$. Soit alors $a \in A$; si $|b| \leq |a|$, alors, puisque A est solide, $b \in A$, une contradiction. Puisque G est totalement ordonné, $|a| < |b|$, donc $a \in B$ puisque B est solide: par suite, $A \subseteq B$. □

LEMME 7.10. *Soit G un groupe totalement ordonné. Alors G est archimédien si et seulement si $\mathcal{C}(G) = \{\{0\}, G\}$.*

PREUVE. Supposons d'abord que $\mathcal{C}(G) = \{\{0\}, G\}$. Soient alors a et b dans G tels que $a \ll b$; supposons que $a \neq 0$. Posons $H = G|a$. Alors H est un sous-groupe solide de G et $a \in H$, donc $H \neq \{0\}$, donc $H = G$ par hypothèse. Par suite, b appartient à H, il existe donc un entier naturel n tel que $b \leq n|a|$. Mais puisque $(n+1)a \leq b$ et $-(n+1)a \leq b$, l'inégalité $(n+1)|a| \leq b$ a lieu: par suite, $(n+1)|a| \leq n|a|$, d'où $|a| = 0$, ce qui contredit $a \neq 0$. Par suite, $a = 0$.

Réciproquement, supposons G archimédien et soit H un sous-groupe solide de G, non réduit à $\{0\}$. Par suite, $H^{++} \neq \varnothing$. Soit $h \in H^{++}$. Pour tout $x \in G$, l'on n'a *pas* $h \ll |x|$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $nh \not\leq |x|$, soit, puisque G est totalement ordonné, $nh > |x|$. Par suite, $x \in H$, et donc $H = G$: ainsi, $\mathcal{C}(G) = \{\{0\}, G\}$. □

Définition. Soit G un groupe réticulé et soient C et D deux sous-groupes solides de G. On dit que D *couvre* C quand C est un sous-ensemble strict de D et que les seuls sous-groupes solides H de G tels que $C \subseteq H \subseteq D$ sont C et D.

Lemme 7.11. *Soit G un groupe totalement ordonné et soient C et D deux sous-groupes solides de G. Si D couvre C, alors C est un sous-groupe* distingué *(donc un ℓ-idéal) de D.*

Preuve. Soit $d \in D$. Alors $x \mapsto d + x - d$ est un ℓ-automorphisme de G, donc $d + D - d$ couvre $d + C - d$. Mais $d + D - d = D$, donc D couvre C et $d + C - d$. Mais par le Lemme 7.10, C et $d + C - d$ sont comparables pour l'inclusion; par définition de la relation "couvre", il vient $C = d + C - d$. □

Lemme 7.12. *Soit G un groupe totalement ordonné et soit $g \in G^{++}$. Posons*

$$G_g = \{x \in G \mid x \ll g\}, \text{ et } G^g = G|g = \{x \in G \mid (\exists n \in \mathbb{N})(|x| \leq ng)\}.$$

Alors G_g et G^g sont deux sous-groupes solides de G, et G^g couvre G_g. De plus, G^g/G_g est totalement ordonné et archimédien.

Preuve. Nous avons déjà vu au Chapitre 6 que G^g est un sous-groupe solide de G. Le fait que G_g est un sous-groupe solide de G résulte facilement du Lemme 7.8. Il est trivial que $G_g \subseteq G^g$ et que $g \in G^g \setminus G_g$. Enfin, supposons qu'il existe un sous-groupe solide H de G tel que $G_g \subsetneqq H \subsetneqq G^g$. Pour tout $x \in H$, si $x \notin G_g$, alors $x \not\ll g$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $g \leq n|x|$, d'où $g \in H$, d'où $G|g \subseteq H$, d'où $G^g = H$, une contradiction. Donc $H \subseteq G_g$, donc $H = G_g$, une contradiction. Par suite, G^g couvre G_g, et donc, par le Lemme 7.11, G_g est un ℓ-idéal de G^g.

Puisque G^g est totalement ordonné et que G^g/G_g en est une image homomorphe, G^g/G_g est totalement ordonné. De plus, puisque G^g couvre G_g, il résulte de la Proposition 7.2 que G^g/G_g n'a pas de sous-groupes solides non triviaux; par suite, il résulte du Lemme 7.10 que G^g/G_g est archimédien. □

On en déduit alors l'importante propriété suivante des groupes réticulés représentables:

Théorème 7.13. *Tout groupe réticulé représentable satisfait l'énoncé*

$$(\forall x, y)(x + y - x - y \ll |x| \vee |y|).$$

Preuve. Il suffit évidemment de montrer que tout groupe *totalement ordonné* satisfait l'énoncé ci-dessus. Soit donc G un groupe totalement ordonné. Soient a et b deux éléments de G, on montre que $a + b - a - b \ll |a| \vee |b|$. Soit $g = |a| \vee |b|$. Si $g = 0$ alors $a = b = 0$ et la conclusion est immédiate; supposons donc que $g > 0$. Soit π la projection canonique de G^g sur G^g/G_g. Puisque G^g/G_g est totalement ordonné et archimédien (Lemme 7.12), il est commutatif (Théorème 7.7) et donc $\pi(a) + \pi(b) - \pi(a) - \pi(b) = 0$, ce qui signifie bien que $a + b - a - b \in G_g$. □

Il est à noter cependant que cette propriété ne caractérise *pas* les groupes réticulés représentables, *voir* par exemple l'Exercice 7.3.

L'on peut également noter que le théorème ci-dessus entraîne immédiatement que *tout groupe réticulé archimédien représentable est commutatif*, mais nous démontrerons dans le chapitre suivant quelque chose de plus fort (théorème d'Iwasawa) entraînant en particulier que tout groupe réticulé archimédien est commutatif.

Le dernier (court) volet de ce chapitre concerne les groupes totalement ordonnés *commutatifs*. Une classe très importante de groupes totalement ordonnés est celle des *puissances lexicographiques* (ou *puissances de Hahn*) de $\mathbb{R}$; leur définition, comme nous allons le voir, présente une analogie formelle avec la définition des *polynômes* à une indéterminée.

Pour ce faire, fixons-nous une *chaîne* $(S, \leq)$. Pour tout $x\colon S \to \mathbb{R}$, notons

$$\operatorname{supp}(x) = \{s \in S \mid x(s) \neq 0\}$$

le *support* de x, et notons $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ l'ensemble des applications $x\colon S \to \mathbb{R}$ telles que $\operatorname{supp}(x)$ (muni de la restriction de $\leq$) soit *bien ordonné*. Puis pour tout $x \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle \setminus \{0\}$, notons $\operatorname{val}(x)$ le plus petit (il existe par définition de $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$) élément de $\operatorname{supp}(x)$; puis notons $\operatorname{val}(0) = +\infty$.

LEMME 7.14. *Dans le contexte ci-dessus, pour tous x et y dans $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$,*

$$\operatorname{val}(x+y) \geq \min\{\operatorname{val}(x), \operatorname{val}(y)\}.$$

De plus, si $\operatorname{val}(x) \neq \operatorname{val}(y)$, *alors*

$$\operatorname{val}(x+y) = \min\{\operatorname{val}(x), \operatorname{val}(y)\}.$$

PREUVE. C'est trivial pour $x = 0$ ou $y = 0$. Sinon, supposons par exemple $\operatorname{val}(x) \leq \operatorname{val}(y)$. Alors pour tout $s < \operatorname{val}(x)$ dans S, $(x+y)(s) = 0 + 0 = 0$: par suite, $\operatorname{val}(x+y) \geq \operatorname{val}(x)$. Si de plus $\operatorname{val}(x) \neq \operatorname{val}(y)$, alors, ici, $\operatorname{val}(x) < \operatorname{val}(y)$, et $(x+y)(\operatorname{val}(x)) = x(\operatorname{val}(x)) \neq 0$, d'où $\operatorname{val}(x+y) = \operatorname{val}(x)$. □

LEMME 7.15. *L'ensemble $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^S, +)$. De plus, si l'on pose*

$$\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+ = \{0\} \cup \big\{x \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle \setminus \{0\} \mid x(\operatorname{val}(x)) > 0\big\},$$

alors $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$ est le cône positif d'une structure de groupe totalement ordonné sur $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$.

PREUVE. Remarquons que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^S$,

$$\operatorname{supp}(x-y) \subseteq \operatorname{supp}(x) \cup \operatorname{supp}(y).$$

Par suite, pour montrer que $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^S$, il suffit de montrer que pour toutes parties bien ordonnées X et Y de S, $X \cup Y$ est bien ordonnée. Pour ce faire, soit donc Z une partie non vide de $X \cup Y$, on montre que Z admet un plus petit élément. Si $Z \subseteq X$ ou $Z \subseteq Y$ alors le problème est résolu (car X et Y sont bien ordonnées), supposons donc que $Z \nsubseteq X$ et $Z \nsubseteq Y$; par suite, Z rencontre X et Y et par suite, puisque X et Y sont bien ordonnées, $Z \cap X$ (resp., $Z \cap Y$) admet un plus petit élément, disons x (resp., y). Puisque S est une chaîne, $\min\{x, y\}$ est défini et il est clairement le plus petit élément de Z. Donc $X \cup Y$ est bien ordonné. Ceci montre donc que $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^S$.

Passons maintenant à la vérification du fait que $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$ est le cône positif d'une structure de groupe ordonné. Il est facile de vérifier que $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+ \cap (-\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+) = \{0\}$; de plus, puisque $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ est commutatif, $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$ est une partie distinguée de $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle \setminus \{0\}$, si $x(\operatorname{val}(x)) > 0$, alors $x \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$, alors que si $x(\operatorname{val}(x)) < 0$, alors $-x \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$: donc $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+ \cup (-\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+) = \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$.

Il reste à vérifier que $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+ + \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+ \subseteq \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$. Soient donc x et y deux éléments de $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$, on vérifie que $x + y \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$. Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors c'est clair, supposons donc que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Posons $u = \operatorname{val}(x)$ et $v = \operatorname{val}(y)$. Si

$u = v$ alors $(x+y)(u) = x(\mathrm{val}(x)) + y(\mathrm{val}(y)) > 0$, donc, d'après le Lemme 7.14, $\mathrm{val}(x+y) = u$ et $(x+y)(u) > 0$: d'où $x + y \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$, par définition. Si par contre $u \neq v$, par exemple $u < v$, alors, par le Lemme 7.14, $\mathrm{val}(x+y) = u$ et $(x+y)(u) = x(u) > 0$, donc de nouveau $x + y \in \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$. Ceci montre donc que $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+ + \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+ \subseteq \mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle^+$, ce qui achève la démonstration. □

Définition. Pour une chaîne quelconque S, la *puissance de Hahn de* $\mathbb{R}$ *par* S est $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$, muni de la structure de groupe totalement ordonné précédente.

La notation $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ utilisée ici n'est nullement universelle, on trouve par exemple dans diverses références la notation $\mathbf{H}_S\mathbb{R}$, ou même la notation $\mathbb{R}^S$, pour désigner ce que nous notons ici $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$. Il est évidemment possible de définir les puissances de Hahn d'un groupe ordonné quelconque ou même des *produits de Hahn* de groupes ordonnés. On peut même faire une construction similaire avec S *non totalement ordonné* et c'est très utile pour l'étude des groupes réticulés abéliens, *voir* [**CoHH**].

La signification intuitive de $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ est la suivante: à tout élément s de S est associé l'élément ε^s de $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ défini par $\varepsilon^s(s) = 1$ et $(\forall t \neq s)(\varepsilon^s(t) = 0)$ (*i.e.*, ε^s est en fait la fonction caractéristique de $\{s\}$). Ceci donne une application injective de S dans $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$. Mais contrairement à ce qui se passe pour la puissance (cartésienne) de $\mathbb{R}$ par S, *les* ε^s *sont comparables entre eux*: plus précisément, $s \mapsto \varepsilon^s$ transforme $<$ en $\gg$, *i.e.*,

$$(\forall s, t \in S)(s < t \Longrightarrow \varepsilon^t \ll \varepsilon^s)$$

(ce dernier point rend peut-être la notation ε^s plus suggestive: plus s est grand, plus ε^s est petit, et il l'est alors beaucoup plus). Ainsi, on obtient dans $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ toute une chaîne, isomorphe à S, d'éléments infiniment petits les uns par rapport aux autres, et tout élément de $\mathbb{R}\langle\!\langle S\rangle\!\rangle$ peut s'écrire $x = \sum_{s\in S} x(s)\varepsilon^s$, où la somme n'est pas en général à support fini mais tout de même à support bien ordonné.

Enfin, l'un des théorèmes les plus importants de la théorie des groupes abéliens totalement ordonnés est le *théorème de Hahn* [**Hahn**]. Une formulation légèrement affaiblie du résultat originel est la suivante:

Théorème 7.16. *Tout groupe abélien totalement ordonné se plonge dans une puissance de Hahn de* $\mathbb{R}$.

Nous ne donnerons pas de preuve de ce résultat ici, mais nous renvoyons par exemple à [**Fuch1**] ou bien [**Biga** *et al.*] pour des preuves différentes. La seconde référence présente en fait un résultat encore considérablement plus général, qui est la généralisation du théorème de Hahn aux groupes abéliens réticulés, dûe à Conrad, Harvey et Holland [**CoHH**].

Exercices du Chapitre 7

Exercice 7.1. Soit $N = \mathbb{Z}$, muni de sa structure usuelle de groupe réticulé, et soit τ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ vers le groupe $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}$ des automorphismes de groupe de $\mathbb{Z}$ défini par

$$\tau(1)\colon x \mapsto -x.$$

On considère le produit semi-direct $G = \mathbb{Z} \rtimes_\tau \mathbb{Z}$, puis

$$P = \{(x, y) \in G \mid (y > 0 \text{ ou } (y = 0 \text{ et } x \geq 0))\}.$$

Montrer que P est le cône positif d'une structure de groupe totalement ordonné *non-commutatif* sur G. Généraliser.

Exercice 7.2. Soit $N = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ muni de sa structure usuelle de groupe réticulé, et soit τ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ vers le groupe $\operatorname{Aut} N$ des automorphismes de groupe de N définie par

$$\tau(1)((x, y)) = (y, x).$$

On considère le produit semi-direct $G = N \rtimes_\tau \mathbb{Z}$, puis

$$P = \{(x, y, z) \in G \mid z > 0 \text{ ou } (z = 0 \text{ et } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0)\}.$$

(a) Montrer que P est le cône positif d'une structure de groupe réticulé sur G, avec, pour tout $(a, b, c) \in G$,

$$(a, b, c) \vee (0, 0, 0) = \begin{cases} (a, b, c) & \text{si } c > 0, \\ (a \vee 0, b \vee 0, 0) & \text{si } c = 0, \\ (0, 0, 0) & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

Posons alors $x = (0, 0, 1)$ et $y = (1, -1, 0)$.

(b) Montrer que $-x + y + x = -y$.

(c) Montrer que $H = \{mx + ny \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G.

Supposons par la suite H muni d'une relation d'ordre $\preceq$ (qui n'est pas nécessairement l'ordre induit de celui de G) qui structure H en groupe réticulé.

(d) Montrer que $\{0, y\}$ n'admet pas de borne supérieure pour $\preceq$. (***Indication:*** Supposons que $\{0, y\}$ admette une borne supérieure $(y \vee 0)$ dans H. En écrivant $(-y) \vee 0 = y \vee 0 - y$ et $(-y) \vee 0 = (-x + y + x) \vee 0$, en déduire que $(2n - 1)y = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.)

Par suite, H est un exemple de sous-groupe non réticulable d'un groupe réticulé (un groupe est dit *réticulable* quand il existe sur ce groupe une relation d'ordre qui le structure en groupe réticulé). Cet exemple particulier est dû à Ch. Holland.

Exercice 7.3. Montrer que le groupe réticulé G de l'Exercice 7.2 n'est pas représentable, mais qu'il satisfait cependant l'énoncé

$$(\forall x, y)(x + y - x - y \ll |x| \vee |y|).$$

Exercice 7.4. La définition de l'irréducibilité sous-directe pour les treillis est formellement la même que pour les groupes réticulés. Montrer que:

(a) Pour tout treillis distributif A et pour tout $u \in A$, l'application $x \mapsto (x \wedge u, x \vee u)$ définit un plongement de treillis de A dans $A' \times A''$ où A' et A'' seront des treillis distributifs que l'on précisera.

(b) Montrer que les seuls treillis distributifs sous-directement irréductibles sont [à isomorphisme près] $\{0\}$ et $\{0, 1\}$.

Exercice 7.5. * Soit p un nombre réel strictement positif. Soit $E = L^p([0, 1])$ l'espace vectoriel des [classes d'équivalence modulo la mesure nulle d'] applications $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ *mesurables* (pour la mesure de Lebesgue, que nous noterons λ) telles que $\int |f|^p \, \mathrm{d}\lambda < +\infty$. Le but de cet exercice est de montrer que *le seul ℓ-homomorphisme de E vers $\mathbb{R}$ est l'homomorphisme nul.* Par suite, E ne se ℓ-plonge dans aucune puissance de $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des applications $f\colon [0,\,1] \to \mathbb{R}$ *mesurables* telles que $\int |f|^p \,\mathrm{d}\lambda < +\infty$, et soit

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{E} \mid \{x \mid f(x) \neq 0\} \text{ est de mesure nulle}\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe réticulé de $\mathbb{R}^{[0,\,1]}$ et que $\mathcal{I}$ est un ℓ-idéal de $\mathcal{E}$.

On munit donc naturellement $E = \mathcal{E}/\mathcal{I}$ de la structure de groupe réticulé quotient.

(b) Montrer que E est archimédien.

Dans tout ce qui suit, soit Φ un ℓ-homomorphisme de E vers $\mathbb{R}$. Définissons $\phi\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ par $(\forall f \in \mathcal{E})(\phi(f) = \Phi(f + \mathcal{I}))$.

(c) Montrer que pour tous f et g dans $\mathcal{E}$, $f \wedge g = 0$ implique que $\phi(f) = 0$ ou $\phi(g) = 0$.

Soit alors $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole (σ-complète) des parties mesurables (au sens de Lebesgue) de $[0,\,1]$. On fixe $f \in \mathcal{E}$ telle que $(\forall x \in [0,\,1])(f(x) > 0)$ et on définit $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ par

$$(\forall X \in \mathcal{B})\left(\mu(X) = \int_X f^p \,\mathrm{d}\lambda\right).$$

On pose alors

$$\mathcal{U} = \big\{X \in \mathcal{B} \mid \phi(f\restriction_{[0,\,1]\setminus X}) = 0\big\}.$$

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\phi(f) > 0$.

(d) Montrer que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de $\mathcal{B}$.

(e) Pour tout $X \in \mathcal{B}$, montrer qu'il existe $x \in [0,\,1]$ tel que $\mu(X \cap [0,\,x]) = (1/2)\mu(X)$; en déduire que si $X \in \mathcal{U}$, alors il existe $Y \in \mathcal{U}$ tel que $Y \subseteq X$ et $\mu(Y) = (1/2)\mu(X)$.

(f) En déduire qu'il existe une suite décroissante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{U}$ qui sont de plus des intervalles de $[0,\,1]$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(X_n) \leq 2^{-(n+1)p}$.

(g) Pour tout $x \in [0,\,1]$, soit $\nu(x)$ le plus grand entier n s'il existe tel que $x \in X_n$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,\,1]$ tel que ν est définie sur $[0,\,1] \setminus \{\alpha\}$.

(h) Montrer que pour tout élément x de $[0,\,1]$, $\{x\}$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$.

(i) Soit $g\colon [0,\,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(\alpha) = 0$, et

$$(\forall x \in [0,\,1] \setminus \{\alpha\})(g(x) = 2^{\nu(x)} f(x)).$$

Montrer que $g \in \mathcal{E}$.

(j) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $g \geq 2^n f\restriction_{X_n}$. En déduire que $\phi(g) \geq 2^n \phi(f)$. Conclure.

Noter que si $p \geq 1$ et si q est l'exposant conjugué de p $(1/p + 1/q = 1)$, alors pour tout $g \in L^q([0,\,1])$ positif, $f \mapsto \int f \cdot g \,\mathrm{d}\lambda$ définit un homomorphisme de groupes ordonnés de E vers $\mathbb{R}$. Dans l'exercice suivant, il n'y aura même pas d'homomorphisme positif non trivial.

Exercice 7.6. *

(a) Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur une partie X de $[0,\,1]$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{U}$ dont l'intersection est vide. (***Indication:*** construire par récurrence une suite d'intervalles emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,\,1]$ telle que pour tout n, $I_n \cap X \in \mathcal{U}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.)

Par la suite, soit G le groupe réticulé $\mathbb{Z}^{[0,\,1]}$. Pour tout $f \in G$, le *support* de f est, par définition, $\operatorname{supp}(f) = \{x \in [0,\,1] \mid f(x) \neq 0\}$. Soit I l'ensemble des éléments f de G tels que $\operatorname{supp}(f)$ soit [au plus] dénombrable.

(b) Montrer que I est un ℓ-idéal de G, et que $H = G/I$ est archimédien. (*n.b.:* G/I est en fait Dedekind σ-complet).

Par la suite, soit $\Phi\colon H \to \mathbb{R}$ un homomorphisme de groupes ordonnés. Définissons $\phi\colon G \to \mathbb{R}$ par $(\forall f \in G)(\phi(f) = \Phi(f + I))$. Supposons que $\phi \neq 0$. Pour tout $X \subseteq [0,\,1]$, posons

$$I_X = \{f \in G \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq X\},$$

puis définissons $\mathcal{M}$ par

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathfrak{P}([0,\,1]) \mid I_X \subseteq \operatorname{Ker}\phi\}.$$

(c) Montrer que $\mathcal{M}$ est un idéal de $\mathfrak{P}([0,\,1])$, contenant comme élément toute partie dénombrable de $[0,\,1]$.

(d) Supposons que pour tout $X \subseteq [0,\,1]$, $\mathcal{M} \cap \mathfrak{P}(X)$ n'est pas un idéal maximal de $\mathfrak{P}(X)$ (*i.e.*, l'idéal dual d'un ultrafiltre sur X).

(d1) Montrer que pour tout $X \in \mathfrak{P}([0,\,1]) \setminus \mathcal{M}$, il existe X' et Y' dans $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathcal{M}$ tels que $X = X' \cup Y'$ et $X' \cap Y' = \varnothing$.

(d2) En déduire deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{P}([0,\,1]) \setminus \mathcal{M}$ telles que pour tout n, Y_n soit la réunion disjointe de X_{n+1} et de Y_{n+1}.

(d3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $f_n \in I^+_{X_n}$ tel que $\phi(f_n) > 1$.

(d4) En remarquant que les X_n sont deux à deux disjoints, montrer qu'il existe $f \in G^+$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})(\sum_{i<n} f_i \leq f)$. Conclure pour (d).

(e) Par la suite, soit $X \subseteq [0,\,1]$ tel que $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathfrak{P}(X)$ soit un idéal maximal de $\mathfrak{P}(X)$. Montrer que $X \notin \mathcal{M}$, et qu'il existe $f \in I_X$ tel que $\phi(f) > 1$.

(f) Supposons $\mathcal{N}$ non principal.

(f1) Déduire du (a) qu'il existe une partition $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X en éléments de $\mathcal{N}$.

(f2) Pour tout $x \in X$, soit $\nu(x)$ l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_n$, et soit $g \in I_X$ définie par $(\forall x \in X)(g(x) = \nu(x)f(x))$. Montrer que $\phi(g) > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure pour (f).

(g) En déduire qu'il existe $x \in X$ tel que $\{x\} \notin \mathcal{N}$. Conclure.

Cet exemple et sa preuve sont dûs à K. Goodearl [**Good3**, Example 9.6].

Exercice 7.7. Soit G un groupe réticulé. On dit que deux parties X et Y de G sont *orthogonales* quand pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, x et y sont orthogonaux.

Montrer que si G est représentable et X et Y sont deux parties orthogonales de G, alors le ℓ-idéal de G engendré par X et le ℓ-idéal de G engendré par Y sont orthogonaux. Montrer que cette propriété caractérise les groupes réticulés représentables.

Exercice 7.8. Montrer l'analogue pour les ℓ-groupes du *second théorème d'isomorphisme*, à savoir:

Soit G un groupe réticulé et soient A un ℓ-sous-groupe de G et B un ℓ-idéal de G. Alors $A + B$ est un ℓ-sous-groupe de G, $A \cap B$ est un ℓ-idéal de A et l'isomorphisme canonique de $A/A \cap B$ sur $A + B/B$ est un ℓ-isomorphisme.

Exercice 7.9. Montrer l'analogue pour les groupes réticulés du *troisième théorème d'isomorphisme*, à savoir:

Soit G un groupe réticulé et soient A et B deux ℓ-idéaux de G tels que $A \subseteq B$. Alors B/A est un ℓ-idéal de G/A, et l'isomorphisme canonique de G/B sur $(G/A)/(B/A)$ est un ℓ-isomorphisme.

Exercice 7.10. Soit G un groupe réticulé. Montrer que $\mathcal{L}(G)$ (treillis des ℓ-idéaux de G) est un 0, 1-sous-treillis de $\mathcal{C}(G)$ (treillis des sous-groupes solides de G), stable par borne inférieure et borne supérieure infinitaires (on dit un "sous-treillis complet").

Exercice 7.11. Soient G et H deux groupes totalement ordonnés archimédiens, soient $u \in G^{++}$ et $v \in H^{+}$. Montrer qu'il existe *au plus* un homomorphisme de groupes ordonnés de G vers H envoyant u sur v.

Exercice 7.12. Soit G un groupe totalement ordonné et soient C et D deux sous-groupes solides de G tels que D couvre C. Montrer que pour tout $g \in G^{+} \cap (D \setminus C)$, $C = G_g$ et $D = G^g$.

Exercice 7.13. Soit G un groupe totalement ordonné. Montrer que pour tous sous-groupes solides A et B de G tels que $A \subsetneqq B$, il existe deux sous-groupes solides C et D de G tels que D couvre C et $A \subseteq C$ et $D \subseteq B$ (on dit que le treillis $(\mathcal{C}(G), \subseteq)$ est *faiblement atomique*).

Exercice 7.14. Soit $S = \mathbb{Q}$ muni de son ordre naturel, et soit $G = \mathbb{R}\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$. On pose

$$I = \{x \in G \mid (\exists s \in S)(s > \sqrt{2} \text{ et } |x| < \varepsilon^s)\}.$$

(a) Montrer que I est un ℓ-idéal de G, de complémentaire donné par

$$\complement I = \{x \in G \mid (\exists s \in S)(s < \sqrt{2} \text{ et } |x| > \varepsilon^s)\}.$$

(b) Montrer que I est un ℓ-idéal *premier* de G.

(c) Montrer que I n'est cependant valeur d'aucun élément de $G \setminus \{0\}$.

Exercice 7.15. Montrer que le groupe réticulé des automorphismes de la chaîne $[0, 1]$ ne satisfait *pas* l'énoncé

$$(\forall x, y)(x + y - x - y \ll |x| \vee |y|).$$

Exercice 7.16. Montrer que pour tous éléments a, b et c d'un groupe réticulé commutatif G,

$$2|a - b| \leq |a - (b + c)| + |a - (b - c)|,$$
$$2(a \vee b) \leq a \vee (b + c) + a \vee (b - c),$$
$$2(a \wedge b) \geq a \wedge (b + c) + a \wedge (b - c).$$

(***Indication:*** On considérera d'abord le cas totalement ordonné).

CHAPITRE 8

Groupes réticulés complets; Théorème d'Iwasawa

Définition. Un groupe réticulé G est *complet* (on dit aussi *Dedekind-complet*) quand toute partie non vide majorée de G admet une borne supérieure. De même, on dit que G est *σ-complet* (ou *Dedekind σ-complet*) quand toute partie non vide majorée de G admet une borne supérieure.

En considérant l'anti-automorphisme $x \mapsto -x$, il est facile de voir que G est complet (resp., σ-complet) si et seulement si toute partie non vide minorée de G admet une borne inférieure.

En vue d'établir le théorème d'Iwasawa, nous allons établir une définition et deux lemmes.

Définition. Soit P un ensemble ordonné. Une partie X de P est dite *sup-fermée* quand pour toute partie Y de X, si $\bigvee Y$ existe dans P, alors $\bigvee Y \in X$.

Rappelons (*voir* Chapitre 6) que pour toute partie X d'un groupe réticulé G, la *polaire* de X, notée $X^\perp$, est l'ensemble défini par

$$X^\perp = \{g \in G \mid (\forall x \in X)(|g| \perp |x|)\},$$

et c'est le pseudo-complément du sous-groupe solide engendré par X dans $\mathcal{C}(G)$.

Lemme 8.1. *Soit G un groupe réticulé complet et soit H un sous-groupe solide de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $H + H^\perp = G$;
(ii) $H = H^{\perp\perp}$;
(iii) *H est sup-fermé.*

Preuve. (i)⇒(ii) Puisque $H \cap H^\perp = \{0\}$ et par hypothèse (i), $H^\perp$ est le complément de H dans $\mathcal{C}(G)$. Par le Corollaire 6.22, $\mathcal{C}(G)$ est une algèbre de Heyting complète, donc un treillis distributif borné, et donc par la Proposition 3.17, tout élément complémenté de $\mathcal{C}(G)$ est "fermé" au sens du treillis pseudo-complémenté $\mathcal{C}(G)$: par définition, cela signifie que $H = H^{\perp\perp}$.

(ii)⇒(iii) Supposons que $H = H^{\perp\perp}$. Soit $X \subseteq H$ tel que $\bigvee X$ existe. On montre que $\bigvee X \in H$. Si $X = \varnothing$ alors $G = \{0\}$ et c'est trivial, supposons donc que $X \neq \varnothing$. En remplaçant au besoin X par $-x + X$ où x est un élément donné de X, on peut supposer sans perte de généralité que $0 \in X$; par suite,

$$\begin{aligned}\bigvee X &= \bigvee_{x \in X} x \\ &= \bigvee_{x \in X} x \vee 0 \qquad (\text{car } 0 \in X) \\ &= \bigvee_{x \in X} x^+,\end{aligned}$$

donc, quitte à remplacer X par $\{x^+ \mid x \in X\}$, on peut supposer sans perte de généralité que $X \subseteq G^+$. Pour tout $h \in H^\perp$, l'énoncé

$$(\forall x \in X)(|h| \wedge x = 0)$$

est alors satisfait, *i.e.*, $|h| \wedge X = \{0\}$. Par suite, en utilisant la Proposition 6.6, on obtient $|h| \wedge \bigvee X = 0$. Mais ceci a lieu pour tout $h \in H^\perp$, et par suite $\bigvee X \in H^{\perp\perp}$, donc, par hypothèse, $\bigvee X \in H$.

(iii)$\Rightarrow$(i) Supposons que H soit sup-fermé. Soit $a \in G^+$. Soit $X = a \wedge H^+ = \{a \wedge x \mid x \in H^+\}$. Puisque $a \geq 0$ et que H est solide, X est une partie de H, qui est évidemment non vide (0 lui appartient) et majorée (par a). Par complétude de G, $b = \bigvee X$ est défini, et par hypothèse, $b \in H$. Pour tout $x \in H^+$, $b + x \in H$ (car $b \in H$ et $x \in H$), et donc, par définition de b, $a \wedge (b + x) \leq b$, soit, en ajoutant $-b$ membre à membre, $(-b + a) \wedge x \leq 0$ (mais $b \leq a$ et $x \geq 0$), d'où $-b + a \perp x$. Par suite, $-b + a \in H^\perp$, et donc $a = b + (-b + a) \in H + H^\perp$. □

Lemme 8.2. *Tout groupe réticulé σ-complet est archimédien.*

Preuve. Soit G un groupe réticulé σ-complet, et soient a et b dans G tels que $a \ll b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient, en utilisant la Proposition 6.17(c), $n|a| = |na| = (na) \vee (-na) \leq b$. Par suite, $X = \{n|a| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majorée; elle est non vide, et elle admet donc une borne supérieure, c. Alors, en utilisant les identités du début du Chapitre 6, on obtient $|a| + c = \bigvee\{(n+1)|a| \mid n \in \mathbb{N}\} = c$, et donc $|a| = 0$; d'où $a = 0$. □

Théorème 8.3 (Théorème d'Iwasawa). *Tout groupe réticulé complet est commutatif.*

Preuve. Soit I une polaire de G, *i.e.*, par définition, il existe un sous-groupe solide H de G tel que $I = H^\perp$. Alors $I^{\perp\perp} = I$, et par suite, par le Lemme 8.1, $G = I + I^\perp$. Mais I et $I^\perp$ sont deux sous-groupes de G tels que $I \cap I^\perp = \{0\}$ et tout élément de I^+ commute avec tout élément de $(I^\perp)^+$ (on utilise la Proposition 6.12)—donc, puisque tout sous-groupe solide de G est engendré par l'ensemble de ses éléments positifs, tout élément de I commute avec tout élément de $I^\perp$. Il résulte alors de la théorie élémentaire des groupes que l'application

$$I \times I^\perp \to G,\ (x, y) \mapsto x + y$$

est un isomorphisme de groupes. En particulier, I est un sous-groupe *distingué* de G: donc *toute polaire de G est un sous-groupe distingué de G.*

Il résulte alors du Théorème 7.5 que G est *représentable*, et donc, par le Théorème 7.13, que pour tous a et b dans G,

$$a + b - a - b \ll |a| \vee |b|.$$

Mais, par le Lemme 8.2, G est archimédien: on en déduit donc que $a + b - a - b = 0$, *i.e.*, $a + b = b + a$. □

Notons que nous avons établi au passage la conséquence suivante du Lemme 8.1:

Corollaire 8.4. *Dans un groupe réticulé complet, toute polaire est un facteur direct.*

Plus précisément, si I est une polaire d'un groupe réticulé complet G, alors l'application

$$I \times I^{\perp} \to G,\ (x, y) \mapsto x + y$$

est un isomorphisme de groupes. *C'est en fait un ℓ-isomorphisme*, en raison du principe général suivant:

LEMME 8.5. *Soit G un groupe réticulé, soient A et B deux sous-groupes solides de G tels que $A \cap B = \{0\}$ et $A + B = G$. Alors l'application*

$$e\colon A \times B \to G,\ (x, y) \mapsto x + y$$

est un isomorphisme de groupes réticulés.

PREUVE. Pour tout $(a, b) \in A^+ \times B^+$, $0 \leq a \wedge b \leq a$, donc, puisque A est un sous-groupe convexe de G, $a \wedge b \in A$; de même, $a \wedge b \in B$. Par hypothèse, $a \wedge b = 0$. Par la Proposition 6.12, il en résulte que a et b commutent. Puisque A et B sont chacun engendrés par leurs éléments positifs, il en résulte que tout élément de A commute avec tout élément de B. Ceci, avec $A \cap B = \{0\}$ et $G = A + B$, suffit, d'après la théorie des groupes élémentaire, à garantir que e est un *isomorphisme de groupes*. Par suite, pour conclure, il suffit de montrer que e est un ℓ-homomorphisme (car tout ℓ-homomorphisme injectif est un ℓ-plongement). Puisque e est un homomorphisme de groupes, il suffit de montrer que pour tout $(a, b) \in A \times B$,

$$e((a, b) \vee (0, 0)) = e((a, b)) \vee 0,$$

i.e.,

$$a \vee 0 + b \vee 0 = (a + b) \vee 0.$$

En développant, on voit que le membre de gauche est égal à $(a + b) \vee a \vee b \vee 0$, et il s'agit donc de montrer que $a \leq (a + b) \vee 0$ et $b \leq (a + b) \vee 0$. Montrons par exemple la première inégalité: $a \leq (a + b) \vee 0$ est équivalent à $0 \leq b \vee (-a)$, soit $(-b) \wedge a \leq 0$; mais c'est le cas: en effet, $(-b) \wedge a \leq |b| \wedge |a| = 0$. □

Cependant, pour l'instant, à part $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et leurs produits, nous ne connaissons pas beaucoup de groupes réticulés complets! Nous allons voir à présent qu'il existe une construction similaire à celle des algèbres de Boole complètes, un certain procédé de *complétion*, que nous allons à présent décrire.

Soit donc G un groupe ordonné quelconque. Pour toute partie X de G et tout $g \in G$, notons $X \leq g$ (resp., $g \leq X$) l'énoncé $(\forall x \in X)(x \leq g)$ (resp., $(\forall x \in X)(x \geq g)$). Pour toute partie X de G, notons

$$X_+ = \{g \in G \mid X \leq g\} \text{ et } X_- = \{g \in G \mid g \leq X\}.$$

Puis pour toutes parties X et Y de G, on pose

$$X \dot{+} Y = \{x + y \mid x \in X \text{ et } y \in Y\},$$
$$X + Y = (X \dot{+} Y)_{+-}.$$

LEMME 8.6. *Pour toutes parties X, Y, et Z de G,*

(a) $X \subseteq Y \Rightarrow (X_+ \supseteq Y_+$ *et* $X_- \supseteq Y_-)$;
(b) $X \subseteq X_{+-}$ *et* $X \subseteq X_{-+}$;
(c) $X_+ = X_{+-+}$ *et* $X_- = X_{-+-}$;
(d) $(X_{+-} \dot{+} Y)_+ = (X \dot{+} Y)_+ = (X \dot{+} Y_{+-})_+$;
(e) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$.

Preuve. (a) et (b) sont triviaux. Pour (c), on obtient immédiatement, en appliquant (a) et (b), que $X_{+-+} = (X_{+-})_+ \subseteq X_+$, et $X_{+-+} = (X_+)_{-+} \supseteq X_+$, d'où l'égalité.

Puisque $X \subseteq X_{+-}$, $X \dot{+} Y \subseteq X_{+-} \dot{+} Y$, d'où, par le (a), $(X \dot{+} Y)_+ \supseteq (X_{+-} \dot{+} Y)_+$. Réciproquement, soit $z \in (X \dot{+} Y)_+$. Par définition, pour tout $y \in Y$, $(\forall x \in X)(x + y \leq z)$, ce qui peut s'écrire $(\forall x \in X)(x \leq z - y)$, *i.e.*, $X \leq z - y$, ou encore $z - y \in X_+$, ou encore, par le (c), $z - y \in X_{+-+}$, ou encore $X_{+-} \leq z - y$. Ceci a lieu pour tout $y \in Y$, d'où $X_{+-} \dot{+} Y \leq z$, *i.e.*, $z \in (X_{+-} \dot{+} Y)_+$. Par suite, l'égalité a lieu; la preuve pour $(X \dot{+} Y_{+-})_+ = (X \dot{+} Y)_+$ est similaire. D'où (d).

Par suite, en utilisant le (d), on obtient

$$\begin{aligned} X + (Y + Z) &= (X \dot{+} (Y \dot{+} Z)_{+-})_{+-} \\ &= (X \dot{+} (Y \dot{+} Z))_{+-} \\ &= ((X \dot{+} Y) \dot{+} Z)_{+-} \\ &= ((X \dot{+} Y)_{+-} \dot{+} Z)_{+-} \\ &= (X + Y) + Z. \end{aligned}$$

□

Notons alors $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ (le "D" est une référence discrète à Dedekind) l'ensemble défini par

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G) = \{X \in \mathfrak{P}(G) \setminus \{\varnothing, G\} \mid X = X_{+-}\}.$$

Par suite, les éléments de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ sont exactement les parties X de G telles que $X = X_{+-}$ et $X \neq \varnothing$ et $X_+ \neq \varnothing$. On les appelle parfois les *coupures de Dedekind* de G. Cette construction est également analogue à celle du "complété de MacNeille" d'un treillis, mais cette dernière autorise X vide ou non majoré.

Notons que $\mathbf{0} = \downarrow 0$ est un élément de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Plus généralement, pour tout $g \in G$, $j(g) = \downarrow g$ est un élément de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Nous appellerons j *l'application canonique de G dans $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$*.

Proposition 8.7. *$(\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G), +, \mathbf{0}, \subseteq)$ est un monoïde ordonné, et j est un plongement de monoïdes ordonnés de G dans $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. De plus, $(\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G), \subseteq)$ est un treillis* conditionnellement complet, i.e., *toute partie non vide majorée (resp., minorée) de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ admet une borne supérieure (resp., une borne inférieure).*

Preuve. Le fait que $(\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G), +, \mathbf{0}, \subseteq)$ est un monoïde ordonné résulte facilement du Lemme 8.6. Soient a et b dans G. Alors $j(a) + j(b) = (\downarrow a \dot{+} \downarrow b)_{+-} = (\uparrow(a+b))_- = \downarrow(a+b)$, d'où $j(a)+j(b) = j(a+b)$. De plus, par définition, $j(0) = \mathbf{0}$, et donc j est un homomorphisme de monoïdes. Pour tous a et b dans G, $j(a) \leq j(b)$ si et seulement si $\downarrow a \subseteq \downarrow b$, si et seulement si $a \leq b$: ainsi, *j est un plongement de monoïdes ordonnés.*

Soit maintenant Σ une partie non vide majorée (disons par $A \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$) de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Alors $\bigcup \Sigma$ est non vide et contenue dans A, d'où $(\bigcup \Sigma)_{+-} \subseteq A_{+-} = A \subsetneqq G$. Par suite, en utilisant le Lemme 8.6(c), $S = (\bigcup \Sigma)_{+-}$ appartient à $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Il est alors facile de vérifier que S est la borne supérieure de Σ dans $(\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G), \subseteq)$. Le raisonnement pour la borne inférieure est similaire. Ainsi, $(\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G), \subseteq)$ est un treillis conditionnellement complet. □

Il n'est cependant pas vrai que $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est toujours un groupe réticulé complet. Une condition nécessaire et suffisante pour cela est donnée par le théorème suivant:

THÉORÈME 8.8. *Soit G un groupe ordonné. Alors $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est un groupe réticulé complet si et seulement si G est dirigé et intégralement clos.*

PREUVE. Supposons d'abord que $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ soit un groupe réticulé complet. Il est alors archimédien (Lemme 8.2), donc intégralement clos (Proposition 6.18). Comme il est évident que tout sous-groupe d'un groupe ordonné intégralement clos est intégralement clos, G lui-même est intégralement clos. De plus, pour tous a et b dans G, soit $C = j(a) \vee j(b)$ (calculé dans $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$). Soit $c \in C_+$, alors $C \leq c$; mais $j(a) \subseteq C$ et $j(b) \subseteq C$, donc $a \in C$ et $b \in C$, d'où $a \leq c$ et $b \leq c$: ainsi, G est dirigé.

Réciproquement, supposons que G soit dirigé et intégralement clos. Il s'agit de vérifier que $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est un groupe réticulé. Pour vérifier que $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est un groupe, il suffit de vérifier que tout élément de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ admet un inverse à droite. Soit donc $A \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Posons $B = -A_+$. Alors B est distinct de $\varnothing$ et de G, et de plus, $B_{+-} = -A_{+-+} = -A_+ = B$: ainsi, $B \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$.

Vérifions que $A + B = \mathbf{0}$. Pour tous $a \in A$ et $b \in A_+$, $a \leq b$, d'où $a + (-b) \leq 0$; par suite, $A \dotplus B \subseteq \downarrow 0$, d'où $A + B = (A \dotplus B)_{+-} \subseteq (\downarrow 0)_{+-} = \downarrow 0$. Pour établir la réciproque, il suffit d'établir que $(A \dotplus B)_+ \subseteq \uparrow 0$. Soit donc $c \in (A \dotplus B)_+$. Soit $b \in A_+$. Alors pour tout $a \in A$, $c \geq a - b$, d'où $c + b \geq a$; ceci ayant lieu pour tout $a \in A$, on en déduit que $c + b \in A_+$. Ceci a lieu pour tout $b \in A_+$, d'où l'assertion

$$(\forall y \in A_+)(c + y \in A_+).$$

Il en résulte facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\forall y \in A_+)(nc + y \in A_+).$$

Fixons alors $a \in A$ et $b \in A_+$. Il vient alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq nc + b$, *i.e.*, $n(-c) \leq b - a$. Puisque G est intégralement clos, il vient que $-c \leq 0$, *i.e.*, $c \geq 0$. Ceci montre donc que $(A \dotplus B)_+ \subseteq \uparrow 0$, et termine donc la preuve que $A + B = \mathbf{0}$.

À ce stade des opérations, nous savons que $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est un groupe ordonné conditionnellement complet. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il est réticulé, *i.e.*, de montrer que toute paire d'éléments de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ admet une borne supérieure. Soient donc A et B deux éléments de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Puisque A_+ et B_+ sont non vides, il existe $a \in G$ et $b \in G$ tels que $A \leq a$ et $B \leq b$. Puisque G est dirigé, il existe $c \in G$ tel que $a \leq c$ et $b \leq c$. Soit alors $C = (A \cup B)_{+-}$. Alors C est non vide, et c appartient à C_+: donc C appartient à $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Il est facile de vérifier que C est la borne supérieure de $\{A, B\}$ dans $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Par suite, $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est un groupe réticulé, ce qui achève la démonstration. □

COROLLAIRE 8.9. *Tout groupe ordonné dirigé et intégralement clos se plonge dans un groupe réticulé complet.*

COROLLAIRE 8.10. *Tout groupe ordonné dirigé et intégralement clos est commutatif.*

COROLLAIRE 8.11. *Tout groupe réticulé archimédien est commutatif. En particulier, tout groupe réticulé σ-complet est commutatif.*

Rappelons qu'il existe des groupes ordonnés archimédiens non commutatifs (*voir* l'Exercice 6.10).

Avant de détailler la structure des groupes réticulés complets, nous allons caractériser l'application canonique de G dans $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$—établissant ainsi, comme pour les algèbres de Boole, *l'unicité* de la complétion.

Définition. Soit H un sous-groupe d'un groupe ordonné G. On dit que H est *dense* dans G quand tout élément de G est borne supérieure d'un ensemble d'éléments de H. Une *complétion* de G est un plongement d'image dense de G dans un groupe réticulé complet.

Il revient évidemment au même de dire que pour tout $g \in G$,

$$g = \bigvee \{h \in H \mid h \leq g\}.$$

Notons qu'alors $X = \{h \in H \mid h \leq g\}$ est non vide: en effet, sinon, $g = \bigvee \varnothing$ est le plus grand élément de G, donc $G = \{0\}$ et donc aussi $H = \{0\}$, et alors $X \neq \varnothing$, contradiction. Par suite, *tout élément de G est la borne supérieure d'une partie non vide de H.*

Lemme 8.12. *Soit H un sous-groupe dense d'un groupe ordonné G. Alors tout élément de G est la borne inférieure d'une partie non vide de H. De plus, pour toute partie X de H, si $\bigvee X$ (resp., $\bigwedge X$) est défini dans G, alors X est majorée (resp., minorée) dans H.*

Preuve. La première partie s'obtient immédiatement en appliquant à la définition et la remarque ci-dessus l'application $x \mapsto -x$.

Soit alors $X \subseteq H$. Supposons par exemple que $\bigvee X$ soit défini dans G. Par ce qui précède, il existe une partie non vide Y de H telle que $\bigvee X = \bigwedge Y$. Par suite, tout élément de X est inférieur ou égal à tout élément de Y, donc (puisque Y est non vide) X est majorée dans H. De même, si $\bigwedge X$ est défini dans G, alors X est minorée dans H. □

Pour la nécessité des hypothèses dans la seconde partie du Lemme ci-dessus, *voir* l'Exercice 8.7.

Proposition 8.13. *Soit G un groupe ordonné dirigé intégralement clos. Alors il existe une seule complétion de G à isomorphisme près.*

Preuve. Pour la partie "existence", il suffit de montrer que le plongement canonique $j\colon G \to \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est une complétion de G. La complétude de $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ résulte du Théorème 8.8. De plus, pour tout $A \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$, il est immédiat que A est la borne supérieure de $j[A]$ (*c.à.d.* $\{\downarrow x \mid x \in A\}$). Par suite, $j\colon G \to \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$ est bien une complétion de G.

Passons maintenant à la partie "unicité". Soient donc $j_0\colon G \to G_0$ et $j_1\colon G \to G_1$ deux complétions de G. Afin de construire l'isomorphisme désiré, nous allons d'abord montrer le fait suivant:

Fait 1. *Soit $\varepsilon \in \{0,1\}$ et soient X et Y deux parties non vides majorées de G. Alors*

$$\bigvee j_\varepsilon[X] \leq \bigvee j_\varepsilon[Y] \Longleftrightarrow Y_+ \subseteq X_+.$$

Preuve du Fait. Si $\bigvee j_\varepsilon[X] \leq \bigvee j_\varepsilon[Y]$, alors pour tout $y \in Y_+$, $\bigvee j_\varepsilon[X] \leq j_\varepsilon(y)$, d'où $(\forall x \in X)(j_\varepsilon(x) \leq j_\varepsilon(y))$, d'où, puisque j_ε est un plongement, $(\forall x \in X)(x \leq y)$, *i.e.*, $y \in X_+$. Ainsi, $Y_+ \subseteq X_+$.

Réciproquement, supposons que $Y_+ \subseteq X_+$. Puisque $j_\varepsilon\colon G \to G_\varepsilon$ est une complétion de G et par le Lemme 8.12, $\bigvee j_\varepsilon[Y]$ est la borne inférieure d'une partie de $j_\varepsilon[G]$, il existe donc $Z \subseteq G$ tel que $\bigvee j_\varepsilon[Y] = \bigwedge j_\varepsilon[Z]$. Par suite, puisque j_ε est un plongement,

$$(\forall (y,z) \in Y \times Z)(y \leq z),$$

i.e., $Z \subseteq Y_+$. Puisque $Y_+ \subseteq X_+$, on obtient $Z \subseteq X_+$, d'où, en "remontant le cours" du raisonnement précédent, $\bigvee j_\varepsilon[X] \leq \bigwedge j_\varepsilon[Z]$, et, par suite, $\bigvee j_\varepsilon[X] \leq \bigvee j_\varepsilon[Y]$. □ Fait.

En particulier, le fait que $\bigvee j_\varepsilon[X] \leq \bigvee j_\varepsilon[Y]$ ne dépend pas de ε. Ceci permet de définir deux applications $\phi\colon G_0 \to G_1$ et $\psi\colon G_1 \to G_0$, inverses l'une de l'autre, telles que pour toute partie non vide majorée X de G,

$$\phi\left(\bigvee j_0[X]\right) = \bigvee j_1[X] \qquad \text{et} \qquad \psi\left(\bigvee j_1[X]\right) = \bigvee j_0[X].$$

Par suite, ϕ et ψ sont inverses l'une de l'autre; ce sont donc des *bijections*. De plus, il résulte du Fait ci-dessus que ϕ et ψ sont croissantes. Par suite, *ϕ et ψ sont deux isomorphismes d'ensembles ordonnés.*

Enfin, soient x et y deux éléments de G_0, on montre que $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)$. Puisque $j_0[G]$ est dense dans G_0, il existe deux parties non vides majorées X et Y de G telles que $x = \bigvee j_0[X]$ et $y = \bigvee j_0[Y]$. Par suite, en utilisant l'identité $\bigvee U + \bigvee V = \bigvee\big(U \dotplus V\big)$ (conséquence immédiate des identités infinitaires du début du Chapitre 6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\phi(x+y) &= \phi\left(\bigvee j_0[X] + \bigvee j_1[Y]\right)\\
&= \phi\left(\bigvee\big(j_0[X] \dotplus j_0[Y]\big)\right)\\
&= \phi\left(\bigvee j_0[X \dotplus Y]\right)\\
&= \bigvee j_1[X \dotplus Y]\\
&= \bigvee j_1[X] + \bigvee j_1[Y]\\
&= \phi(x) + \phi(y).
\end{aligned}$$

Par suite, ϕ est un homomorphisme de groupes. On aurait montré de même que ψ est un homomorphisme de groupes. Ainsi, ϕ est ψ sont deux isomorphismes de groupes ordonnés, inverses l'un de l'autre.

Il reste à vérifier que $j_1 = \phi \circ j_0$. C'est immédiat: pour tout $g \in G$, $\phi \circ j_0(x) = \phi\left(\bigvee j_0[\{x\}]\right) = \bigvee j_1[\{x\}] = j_1(x)$. Ceci achève la démonstration. □

Notons que l'énoncé de la Proposition 8.13 dit légèrement plus que l'unicité à isomorphisme près de tout groupe réticulé complet dans lequel G est dense: il s'agit en effet de l'unicité *au-dessus de G*; cela signifie par exemple que si G_0 et G_1 sont deux groupes réticulés complets dans lesquels G est dense, alors il existe un isomorphisme de G_0 sur G_1 *laissant fixes les éléments de G.*

Comme pour les algèbres de Boole, nous appellerons *la* complétion d'un groupe ordonné dirigé et intégralement clos G celle qui est construite explicitement par la méthode des coupures de Dedekind décrite ci-dessus. Il est en général commode d'identifier G à son image $j[G]$ dans $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{D}}(G)$. Modulo cette identification, *la complétion de G, souvent notée $\hat{G}$, est un groupe réticulé complet contenant G dans lequel G est dense. Ce groupe réticulé est unique à isomorphisme près.*

Bien que $\hat{G}$ puisse être assez "loin" de G (par exemple quand G n'est pas lui-même réticulé...), le plongement de G dans sa complétion possède certaines propriétés agréables:

PROPOSITION 8.14. *Soit G un groupe ordonné dirigé et intégralement clos, soit $\hat{G}$ la complétion de G. Alors le plongement de G dans $\hat{G}$ est* complet, i.e., *pour toute partie X de G, si $\bigvee X$ (resp., $\bigwedge X$) est défini dans G, alors il est également défini dans $\hat{G}$ et c'est le même. En particulier, si G est un groupe réticulé, alors G est un sous-groupe réticulé de $\hat{G}$.*

PREUVE. Supposons par exemple que $\bigvee X$ soit défini dans G, notons le a. Montrons que a est la borne supérieure de X dans $\hat{G}$. Tout d'abord, a majore X. Soit $g \in \hat{G}$ tel que $X \leq g$. Puisque G est dense dans $\hat{G}$, il existe (Lemme 8.12) une partie Y de G telle que $g = \bigwedge Y$ (dans $\hat{G}$). Par suite, $X \leq \bigwedge Y$, *i.e.*, $Y \subseteq X_+$; mais puisque a est la borne supérieure de X dans G, $X_+ = \uparrow a$, donc $Y \subseteq \uparrow a$, d'où $a \leq Y$; par suite, puisque g est la borne inférieure de Y dans $\hat{G}$, il vient $a \leq g$. Ceci montre bien que a est la borne supérieure de X dans $\hat{G}$. En appliquant $x \mapsto -x$, on obtient le résultat pour $\bigwedge$.

En appliquant ce résultat aux paires d'éléments de G, on obtient la conclusion dans le cas où G est un groupe réticulé. □

Cependant, l'analogie avec les algèbres de Boole complètes s'arrête (entre autres) au théorème de Sikorski: en effet, il n'est pas difficile de montrer que tout groupe réticulé *injectif* (au sens donné au Chapitre 4) est trivial (*voir* l'Exercice 8.9). Cependant, il est possible (*voir* [**Wehr5**]) de montrer—mais nous ne présenterons pas la preuve ici, ne disposant pas des outils nécessaires (méthode du forcing en théorie des ensembles)—le résultat suivant, qui est l'analogue du théorème de Sikorski pour les groupes réticulés complets:

THÉORÈME 8.15. *Soit G un groupe réticulé complet. Soit $(\mathbf{x}_i)_{i\in I}$ un ensemble de symboles de variable ("inconnues"), soit $(\varphi_j)_{j\in J}$ un ensemble de formules atomiques du langage $(\vee, \wedge, +, -, \leq)$ à variables dans $\{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$ et à paramètres dans G, soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I d'éléments de G^+. Considérons le système "d'équations" Σ suivant:*

$$\Sigma\colon \begin{cases} \varphi_j(\vec{\mathbf{x}}) & \textit{(tout } j \in J\textit{)} \\ |\mathbf{x}_i| \leq a_i & \textit{(tout } i \in I\textit{).} \end{cases}$$

Si tout sous-système fini de Σ admet une solution dans G^I, alors Σ lui-même admet une solution dans G^I.

Ce que dit ce résultat est que pour tout système d'équations ou d'inéquations Σ (utilisant $\vee$, $\wedge$, $+$, $-$, $\leq$) à paramètres dans un groupe réticulé complet G, *sans aucune restriction sur le nombre d'inconnues de Σ (qui peut être infini)*, s'il existe un "rectangle" $\prod_{i\in I}[-a_i, a_i]$ (où $[-a_i, a_i] = \{x \in G \mid -a_i \leq x \leq a_i\}$) dans lequel tout sous-système fini de Σ admet une solution, alors Σ lui-même admet une solution dans $\prod_{i\in I}[-a_i, a_i]$. Il n'est par ailleurs pas difficile de voir que cette propriété dite de "compacité équationnelle" entraîne la complétude, si bien que l'on obtient de nouveau un équivalent *algébrique* (bien que cela n'apparaisse pas au premier coup d'œil) de la complétude pour les groupes réticulés.

Nous allons à présent nous concentrer sur certaines propriétés *du premier ordre* satisfaites par les groupes réticulés complets et pas par tous les groupes réticulés. Nous connaissons déjà une telle propriété, qui est la *commutativité*; mais même dans le cas commutatif, il existe des différences "au premier ordre" entre les groupes réticulés complets et les groupes réticulés en général.

LEMME 8.16. *Soit m un entier naturel non nul, soit G un groupe abélien ordonné non k-perforé pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ et soit X une partie de G. Si $\bigvee X$ (resp., $\bigwedge X$) est défini dans G, alors $\bigvee(mX)$ (resp., $\bigwedge(mX)$) aussi, et*

$$\bigvee(mX) = m \bigvee X \qquad (\textit{resp.}, \qquad \bigwedge(mX) = m \bigwedge X).$$

PREUVE. Par récurrence sur m. C'est évident pour $m = 1$. Supposons la propriété vraie pour $m - 1$, où $m \geq 2$. Supposons par exemple que $b = \bigvee X$ soit défini. Alors mb est un majorant de mX; montrons que c'est le plus petit. Soit donc c un majorant de mX. Soit $y \in X$. Alors pour tout $x \in X$, $mx \leq c$ et $my \leq c$, d'où $(m-1)my \leq (m-1)c$, d'où, en additionnant membre à membre, $mx + (m-1)my \leq mc$, d'où, en simplifiant, $x + (m-1)y \leq c$, soit $(m-1)y \leq c - x$; par suite, en prenant la borne supérieure sur $y \in X$ et par hypothèse de récurrence, il vient que $(m-1)b \leq c - x$, soit $x \leq c - (m-1)b$; en prenant la borne supérieure sur $x \in X$, il vient donc $b \leq c - (m-1)b$, soit $mb \leq c$: ceci prouve donc bien que $mb = \bigvee(mX)$. Le résultat pour $\bigwedge$ s'en déduit par dualité. □

L'analogue de ce résultat n'est pas vrai en général pour G non commutatif, puisqu'on n'a alors même pas toujours $2a \wedge 2b = 2(a \wedge b)$. De plus, dans le cas abélien, voici quelques contrexemples qui montrent que l'on ne peut pas trop affaiblir l'hypothèse de non perforation:

EXEMPLE 8.17. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, muni du cône positif trivial. Posons $a = 0$ et $b = 1$. Alors $2a = 2b$ dans G, alors que $\{a, b\}$ n'admet pas de borne supérieure dans G.

Cependant, cet exemple est un groupe de torsion. L'exemple ci-dessous est sans torsion (mais perforé):

EXEMPLE 8.18. Soit $G = \mathbb{Z}$, muni du cône positif $G^+ = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (c'est une vieille connaissance!). Alors G est un groupe abélien sans torsion ordonné dirigé. Posons $a = 2$ et $b = 3$. Alors $2a \vee 2b$ est défini dans G (en fait, $2a < 2b$), mais $\{a, b\}$ n'admet pas de borne supérieure dans G: en effet, a et b sont inférieurs (dans G) à $c = 5$ et $d = 6$, mais il n'existe aucun élément x de G tel que $2, 3 \leq x \leq 5, 6$.

Ceci laisse apparaître, pour la première fois, la *propriété d'interpolation finie* (ou plutôt, en l'occurrence, son absence...).

Voyons maintenant si l'on essaie d'aller de $\bigvee(mX)$ à $\bigvee X$... même dans le cas des groupes dirigés, l'on ne peut *pas* dire que si $\bigvee(mX)$ existe (avec $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), alors $\bigvee X$ existe, même quand X est une paire, *voir* les Exercices 8.10 et 8.11. Il existe même des contrexemples quand G est un groupe réticulé abélien, *voir* l'Exercice 8.12.

PROPOSITION 8.19. *Soit G un groupe réticulé complet et soit m un entier naturel non nul. Alors pour tout $x \in G$, il existe un plus grand élément y de G tel que $my \leq x$.*

PREUVE. Soit $X = \{y \in G \mid my \leq x\}$. Alors $-|x| \in X$, donc X est non vide. De plus, X est majorée (par $|x|$), donc, puisque G est un groupe réticulé complet, X admet une borne supérieure, disons y, dans G. Par le Lemme 8.16, $my = m \bigvee X = \bigvee(mX) \leq x$, et y est donc le plus grand élément de X. □

Si G est un groupe réticulé et $x \in G$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous noterons $(x : m)$ le plus grand élément y de G s'il existe tel que $my \leq x$. Il est étrange de noter

que même dans le cas σ-complet, $(x : 2)$ peut ne pas être défini pour tout x (*voir* l'Exercice 8.13).

DÉFINITION. Soit G un groupe réticulé. Un élément s de $G^+ \setminus \{0\}$ est dit *singulier*, quand

$$(\forall x \in G^+)(2x \leq s \Longrightarrow x = 0).$$

Le groupe réticulé G est dit *singulier*, quand tout élément de $G^+ \setminus \{0\}$ majore un élément singulier de G.

LEMME 8.20. *Soit G un groupe réticulé, soit g un élément strictement positif de G qui ne majore aucun élément singulier de G. Alors pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $h \in G^+ \setminus \{0\}$ tel que $mh \leq g$.*

PREUVE. Un raisonnement facile par récurrence montre qu'il suffit de prouver que si $g > 0$ ne majore aucun élément singulier, alors il existe $h > 0$ tel que $2h \leq g$. Mais ceci résulte du fait que g lui-même n'est pas singulier. □

DÉFINITION. Un monoïde M est *divisible*, quand pour tout $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'égalité $mM = M$ a lieu.

COROLLAIRE 8.21. *Soit G un groupe réticulé complet. Alors G ne contient aucun élément singulier si et seulement si G est divisible.*

PREUVE. Il est trivial que si G est divisible, alors il ne contient aucun élément singulier. Réciproquement, supposons que G ne contienne aucun élément singulier. Soit $x \in G$ et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Puisque G est complet, $y = (x : m)$ est défini (Proposition 8.19). Supposons que $my < x$, et soit $g = x - my$. D'après le Lemme 8.20, il existe $h > 0$ tel que $mh \leq g$. Alors $m(y + h) \leq x$ avec $y + h > y$, contradiction. Ainsi, $my = x$, ce qui prouve que G est divisible. □

COROLLAIRE 8.22. *Soit G un groupe réticulé complet. Alors G est somme directe (en tant que groupe réticulé) d'un groupe réticulé complet divisible et d'un groupe réticulé complet singulier.*

PREUVE. Soit S l'ensemble des éléments singuliers de G. Puisque $S^\perp$ est une polaire de G, il résulte du Lemme 8.1 que $G = S^\perp \oplus S^{\perp\perp}$ (en tant que groupe réticulé, *voir* le Lemme 8.5). Par le Lemme 8.20, $S^\perp$ est divisible. Si g est un élément strictement positif de $S^{\perp\perp}$, alors g majore un élément singulier: dans le cas contraire, g appartiendrait en effet à $S^\perp$, contradiction. Par suite, $S^{\perp\perp}$ est singulier. □

Nous allons conclure ce chapitre par une autre propriété du premier ordre des groupes réticulés complets (et en fait des groupes réticulés σ-complets), la *projetabilité*.

DÉFINITION. Un groupe réticulé G est dit *projetable*, quand pour tout $p \in G^+$, $G = \{p\}^\perp \oplus \{p\}^{\perp\perp}$.

Ainsi, un groupe réticulé est projetable quand toute polaire principale de G en est un facteur direct; il revient au même de dire que G satisfait l'énoncé

$$(\forall x)(\forall p \geq 0)(\exists y)\big(|y| \wedge p = 0 \text{ et } (\forall z \geq 0)(z \wedge p = 0 \Rightarrow |-y + x| \wedge z = 0)\big).$$

Pour les groupes réticulés complets, c'est vrai d'après le Corollaire 8.4. Nous allons le montrer pour les groupes réticulés σ-complets. Cette hypothèse n'est pas la plus

faible possible, *voir* par exemple [**Bern2**] où S. J. Bernau montre que tout groupe archimédien "latéralement σ-complet" est projetable.

PROPOSITION 8.23. *Tout groupe réticulé σ-complet est projetable.*

PREUVE. Soit G un groupe réticulé σ-complet. Pour montrer que G est projetable, il suffit de montrer que pour tout $p \in G^+$, $G = \{p\}^\perp + \{p\}^{\perp\perp}$; pour ce faire, il suffit de montrer que tout élément de G^+ appartient à $\{p\}^\perp + \{p\}^{\perp\perp}$. Soit donc $a \in G^+$. Posons $b = \bigvee\{a \wedge np \mid n \in \mathbb{N}\}$ (est bien défini puisque G est σ-complet). Tout élément de $\{p\}^\perp$ est orthogonal à tous les $a \wedge np$ ($n \in \mathbb{N}$), donc à leur borne supérieure par la Proposition 6.6; par suite, b appartient à $\{p\}^{\perp\perp}$.

Il reste donc à montrer que $a - b \in \{p\}^\perp$. Soit donc $x = (a-b) \wedge p$. Alors

$$\begin{aligned}
b + x &= (b + a - b) \wedge (b + p) \\
&= a \wedge (b + p) && \text{(car } G \text{ est commutatif)} \\
&= a \wedge \bigvee\{(a \wedge np) + p \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&= a \wedge \bigvee\{(a + p) \wedge (n+1)p \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&= \bigvee\{a \wedge (a + p) \wedge (n+1)p \mid n \in \mathbb{N}\} \\
&= \bigvee\{a \wedge (n+1)p \mid n \in \mathbb{N}\} && \text{(car } p \geq 0) \\
&= b,
\end{aligned}$$

d'où $x = 0$, ce qui montre bien que $(a - b) \wedge p = 0$. □

Exercices du Chapitre 8

EXERCICE 8.1. Montrer qu'un groupe réticulé G est complet si et seulement si toute partie non vide *bornée* de G admet une borne supérieure (resp., toute partie non vide *bornée* de G admet une borne inférieure).

EXERCICE 8.2. Soit G un groupe réticulé. Si $e \in G^+$, on dit qu'une *composante* de e est un élément x de G tel que $x \wedge (e - x) = 0$.

(a) Montrer que si x est une composante de e, alors e et x commutent.
(b) Montrer que l'ensemble des composantes de e est une algèbre de Boole. Quel est le complément d'une composante de e?
(c) Montrer que deux composantes quelconques de e commutent. (***Indication:*** si x et y sont deux composantes de e, montrer que y est la somme d'une composante $y_0 \leq x$ et d'une composante $y_1 \perp x$; montrer que deux composantes comparables ou orthogonales commutent).
(d) On suppose que G est *complet*, et que e est une *unité faible* de G, *c.à.d.*

$$(\forall x \in G^+)(e \wedge x = 0 \Rightarrow x = 0).$$

Montrer que l'algèbre de Boole des composantes de e est isomorphe à l'algèbre de Boole complète des polaires de G.

EXERCICE 8.3. Soit G un groupe réticulé complet non réduit à $\{0\}$ dont les seules polaires sont $\{0\}$ et G. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{R}$.

EXERCICE 8.4. Soit G un groupe réticulé complet et soit B l'algèbre de Boole complète des polaires de G. Montrer que pour tout entier naturel n, B a exactement

n atomes (*i.e.*, B est isomorphe à $\mathfrak{P}(n)$) si et seulement si il existe $k \leq n$ tel que $G \cong \mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Exercice 8.5. * Soit G un groupe réticulé complet et soit X une partie *finie* de G. Montrer qu'il existe un entier naturel n et des polaires G_k ($k < n$) de G telles que $G = \bigoplus_{k<n} G_k$ et, pour tout $k < n$, si π_k est la projection de G sur G_k suivant $\bigoplus_{j \neq k} G_j$, alors $\pi_k[X]$ est une chaîne. (***Indication:*** par exemple pour $X = \{a, b\}$, dire que la polaire de $(a - b)^+$ est un facteur direct de G).

Exercice 8.6. Trouver un exemple de groupe ordonné conditionnellement complet non réticulé (*n.b.:* il existe des exemples triviaux!).

Exercice 8.7. Soit $G = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et soit $H = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ le sous-groupe de G dont les éléments sont les applications *à support fini* de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$; munissons G de sa structure naturelle de groupe ordonné.

(a) Montrer que G et H sont des groupes réticulés complets, et qu'en fait H est un sous-groupe réticulé complet de G (*i.e.*, c'est un sous-groupe réticulé de G et pour toute partie X de H, si $\bigvee X$ est défini dans H, alors il est défini dans G et c'est le même).
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n la fonction caractéristique de $\{n\}$. Soit $X = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\bigvee X$ est défini dans G mais que X n'est pas majorée dans H.

Exercice 8.8. Soit G un groupe ordonné dirigé intégralement clos. Soient a et b deux éléments de G tels qu'il existe une partie *infinie* I de $\mathbb{N}$ telle que $(\forall n \in I)(na \leq b)$. Montrer que $a \leq 0$.

Exercice 8.9. Un groupe réticulé G est *injectif* quand pour tous groupes réticulés $A \subseteq B$, tout ℓ-homomorphisme de A vers G se prolonge en un homomorphisme de B vers G.

Montrer que si G est un groupe réticulé injectif, alors $G = \{0\}$ (***Indication:*** Considérer le plongement canonique de G dans $\mathbb{Z} \times_{\text{lex}} G$).

Exercice 8.10. Soit A le groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, muni du cône positif $2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$. Puis posons $G = \mathbb{Q} \times_{\text{lex}} A$. Soient α et β les deux éléments de A définis par $\alpha = (1, 0)$ et $\beta = (0, 1)$; puis posons $a = (0, \alpha)$ et $b = (0, \beta)$.

(a) Montrer que G est un groupe abélien ordonné dirigé sans torsion.
(b) Montrer que $\gamma = 2\alpha \vee 2\beta$ est défini dans A.
(c) Soit $c = (0, \gamma)$. Montrer que $c = 2a \vee 2b$ dans G.
(d) Montrer que $\{a, b\}$ n'admet pas de borne supérieure dans G.

L'exercice suivant montre un exemple *non perforé* avec des propriétés similaires.

Exercice 8.11. Soit $B = \mathbb{Z}^3$, muni du cône positif

$$B^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x + y = 2z\}.$$

Puis posons $G = \mathbb{Q} \times_{\text{lex}} B$. Soient α, β, et γ les éléments de B définis par

$$\alpha = (1, 0, 0); \qquad \beta = (0, 1, 0); \qquad \gamma = (2, 2, 1).$$

Puis posons $a = (0, \alpha)$, $b = (0, \beta)$, et $c = (0, \gamma)$.

(a) Montrer que H est un groupe abélien ordonné dirigé non perforé.
(b) Montrer que $\gamma = 2\alpha \vee 2\beta$ dans B. En déduire que $c = 2a \vee 2b$ dans H.
(c) Montrer que $c \notin 2H$, et que $\{a, b\}$ n'admet pas de borne supérieure dans H.

EXERCICE 8.12. * Soit X un espace topologique séparé. On considère l'ensemble $G_0 = \mathbf{C}_{\mathrm{c}}(X, \mathbb{Z})$ des applications continues à support compact de X vers $\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que G_0 est un sous-groupe réticulé du groupe réticulé $\mathbf{C}(X, \mathbb{Z})$ des applications continues de X vers $\mathbb{Z}$.

(b) Soit $G = \{f + 2k \mid f \in G_0 \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G est un sous-groupe réticulé de $\mathbf{C}(X, \mathbb{Z})$ contenant G_0.

Par la suite, prenons $X = \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$, où $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit et X est muni de la topologie induite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n = \{x \in X \mid n \in x\}$ et soit f_n la fonction caractéristique de X_n. Prenons G_0 et G définis comme ci-dessus. Soit e la fonction constante de valeur 2 sur X.

(c) Montrer que les f_n ($n \in \mathbb{N}$) et e appartiennent à G.

(d) Montrer que dans G, $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} 2f_n = e$.

(e) Montrer que cependant, $e \notin 2G$ et que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de borne supérieure dans G.

EXERCICE 8.13. * Soit X un ensemble indénombrable quelconque (par exemple $\mathbb{R}$). Soit G_0 l'ensemble des applications $f\colon X \to \mathbb{R}$ dont le *support*, $\operatorname{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ est *dénombrable.* Puis soit $G = \{f + 2k \mid f \in G_0 \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que G_0 est un sous-groupe réticulé σ-complet de $\mathbb{R}^X$.

(b) Montrer que G est un sous-groupe réticulé σ-complet de $\mathbb{R}^X$ contenant G_0.

(c) Soit a la fonction constante de valeur 2 de X vers $\mathbb{R}$. Montrer que $a \in G$, et que $(a : 2)$ n'est pas défini dans G.

EXERCICE 8.14. Soit G un groupe réticulé. Montrer qu'un élément s de $G^+ \setminus \{0\}$ est singulier si et seulement si

$$(\forall x, y \in G^+)(x + y \leq s \Longrightarrow x \wedge y = 0).$$

EXERCICE 8.15. Montrer que tout groupe réticulé σ-complet G qui est 2-*divisible* (*i.e.*, $2G = G$) peut être muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. (***Indication:*** soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres rationnels de la forme $p/2^n$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et tout $x \in G^+$, définir

$$\lambda \cdot x = \bigvee \{rx \mid r \in \mathbb{D} \text{ et } r \leq \lambda\}.)$$

EXERCICE 8.16. Soit A un groupe réticulé commutatif et soit E un groupe réticulé complet. On dit qu'un homomorphisme *de groupe* $f\colon A \to E$ est *relativement borné* quand pour tout $x \in A^+$, $f\big[[0, x]\big]$ est majoré (on note $[0, x] = \{y \in G \mid 0 \leq y \leq x\}$), *positif* quand $f[A^+] \subseteq E^+$.

(a) Montrer qu'un homomorphisme de groupe $f\colon A \to E$ est relativement borné si et seulement si il existe deux homomorphismes de groupe g et h de A vers E tels que $f = g - h$. (***Indication:*** poser $g(x) = \bigvee\{f(y) \mid y \in [0, x]\}$).

Soit $\operatorname{Hom}_{\mathrm{b}}(A, E)$ l'ensemble des homomorphismes relativement bornés de A vers E.

(b) Montrer que l'ensemble des homomorphismes positifs de A vers E est le cône positif d'une structure de groupe abélien ordonné dirigé sur $\operatorname{Hom}_{\mathrm{b}}(A, E)$.

(c) Montrer que $\operatorname{Hom}_{\mathrm{b}}(A, E)$ est un groupe réticulé complet.

EXERCICE 8.17. Soit G un groupe réticulé archimédien. Montrer que pour toute partie K de G et tout $b \in K^{\perp\perp}$,

$$b = \bigvee \{b \wedge n|x| \mid x \in K \text{ et } n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 8.18. Soit G un groupe réticulé. Montrer que G est archimédien si et seulement si pour tous éléments a et b de G^+,

$$b = \bigvee \{b \wedge n(nb - a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(***Indication:*** si la condition ci-dessus est vérifiée, il est facile de voir que G est archimédien. Si G est archimédien et a et b sont deux éléments de G^+, appliquer l'Exercice 8.17 à $K = \{(nb - a) \vee 0 \mid n \in \mathbb{N}\}$; pour vérifier que $b \in K^{\perp\perp}$, montrer que pour tout $p \in K^\perp$ positif et tout $n \in \mathbb{N}$, $n(b \wedge p) \leq a$.)

CHAPITRE 9

Groupes d'interpolation, groupes de dimension; Théorème d'Effros, Handelman, et Shen

Ce chapitre se propose d'introduire une notion plus faible que celle de groupe abélien réticulé, celle de *groupe d'interpolation*. En fait, c'est pour les *groupes de dimension* que nous disposerons d'un puissant théorème de structure, celui d'Effros, Handelman, et Shen, qui dit que les groupes de dimension sont exactement les limites directes de groupes simpliciaux. Ce résultat date de 1980 [**EfHS**], mais P.A. Grillet a démontré en 1976 un résultat sur les semi-groupes commutatifs dont le théorème d'Effros, Handelman, et Shen se déduit facilement [**Gril**].

Notation. Soit $(P, \leq)$ un ensemble préordonné. Pour toutes parties X et Y de P, on note $X \leq Y$ l'énoncé

$$(\forall (x, y) \in X \times Y)(x \leq y);$$

si $X = \{a\}$ (resp., $Y = \{b\}$), on note souvent $a \leq Y$ (resp., $X \leq b$). Si $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ et $Y = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, on note

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 \\ a_2 & & b_2 \\ \vdots & \leq & \vdots \\ a_m & & b_n \end{matrix}$$

Le but de cette dernière notation est d'éviter les notations ambiguës du type $a \leq b, c \leq d$, qui peut signifier aussi bien $[a \leq b$ et $c \leq d]$ que

$$a \leq \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \leq d.$$

Définition. La *propriété d'interpolation finie* est l'axiome suivant:

$$(\forall a_0, a_1, b_0, b_1) \left(\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix} \Rightarrow (\exists x) \left(\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq x \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix} \right) \right).$$

Proposition 9.1. *Soit G un groupe abélien préordonné. Alors $(G, \leq)$ satisfait la propriété d'interpolation finie si et seulement si $(G^+, +)$ satisfait la propriété de raffinement.*

Preuve. Supposons d'abord que $(G^+, +)$ satisfait la propriété de raffinement. Soient alors a_0, a_1, b_0, et b_1 dans G tels que $\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}$. En appliquant la propriété de raffinement à l'égalité (à termes dans G^+)

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1) = (b_1 - a_0) + (b_0 - a_1),$$

on obtient une matrice de raffinement

	$b_1 - a_0$	$b_0 - a_1$
$b_0 - a_0$	c_{00}	c_{01}
$b_1 - a_1$	c_{10}	c_{11}

avec les c_{ij} $(i, j < 2)$ dans G^+. Soit alors $x = a_0 + c_{00}$. Alors $a_0 \leq x$ et $x \leq a_0 + c_{00} + c_{01} = b_0$. De plus, $b_0 - x = b_0 - a_0 - c_{00} = c_{01} \leq c_{01} + c_{11} = b_0 - a_1$, d'où $a_1 \leq x$, et enfin $x = a_0 + c_{00} \leq a_0 + c_{00} + c_{10} = b_1$: ainsi, nous avons obtenu

$$\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq x \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}.$$

Réciproquement, supposons que $(G, \leq)$ satisfait la propriété d'interpolation finie. Soient a_0, a_1, b_0 et b_1 dans G^+ tels que $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$. Pour tout $x \in G^+$, la matrice suivante

	b_0	b_1
a_0	x	$a_0 - x$
a_1	$b_0 - x$	$b_1 - a_0 + x$

est une matrice de raffinement (en effet, $(b_0 - x) + (b_1 - a_0 + x) = a_1$), il suffit donc de chercher $x \in G$ tel que x, $a_0 - x$, $b_0 - x$, et $b_1 - a_0 + x$ soient tous positifs, *i.e.*,

$$\begin{matrix} 0 \\ a_0 - b_1 \end{matrix} \leq x \leq \begin{matrix} a_0 \\ b_0 \end{matrix}.$$

Puisque G satisfait la propriété d'interpolation finie, il suffit pour qu'il existe un tel x que

$$\begin{matrix} 0 \\ a_0 - b_1 \end{matrix} \leq \begin{matrix} a_0 \\ b_0 \end{matrix}.$$

La seule inégalité à vérifier qui n'est pas tout à fait triviale est $a_0 - b_1 \leq b_0$, soit $a_0 \leq b_0 + b_1$, ce qui est immédiat vu que $a_0 + a_1 = b_0 + b_1$. □

Définition.

- Un *groupe d'interpolation* est un groupe abélien ordonné satisfaisant la propriété d'interpolation finie.
- Un *groupe de Riesz* est un groupe d'interpolation dirigé.
- Un *groupe de dimension* est un groupe d'interpolation dirigé non perforé, *i.e.*, un groupe de Riesz non perforé.

Exemple 9.2. Soit G un groupe abélien quelconque. Alors G, muni du cône positif trivial $\{0\}$, est un groupe d'interpolation; ce n'est un groupe de Riesz que si $G = \{0\}$.

Exemple 9.3. Munissons $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de son ordre trivial (qui donne la seule structure de groupe ordonné possible sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), $\mathbb{Q}$ de son ordre naturel et soit $G = \mathbb{Q} \times_{\text{lex}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors il est facile de vérifier que G est un groupe de Riesz (*exercice:* écrire les preuves!). Cependant, G est 2-perforé, et en fait il n'est pas sans torsion.

Proposition 9.4. *Tout groupe abélien réticulé est un groupe de dimension.*

PREUVE. Soit G un groupe abélien réticulé. Alors G est dirigé (Lemme 6.13(a)) et G est non perforé (Corollaire 6.16). Si a_0, a_1, b_0, et b_1 sont des éléments de G tels que

$$\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix},$$

alors on obtient immédiatement

$$\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq a_0 \vee a_1 \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix};$$

par suite, G satisfait la propriété d'interpolation finie. □

EXEMPLE 9.5. Soit $\mathbb{Z}_{\text{discr}}$ le groupe $\mathbb{Z}$, muni du cône positif $\{0\}$; soit $G = \mathbb{Q} \times_{\text{lex}} \mathbb{Z}_{\text{discr}}$. Alors il est facile de vérifier que G est un groupe de dimension (*voir* l'Exercice 9.2 pour une généralisation utile). Cependant, G n'est pas un groupe réticulé: par exemple, $(0,0)$ et $(0,1)$ n'ont pas de borne supérieure dans G; en effet, si (r,n) était une telle borne supérieure, alors r ne peut être nul (sinon $n = 0 = 1$), donc $r > 0$, et on obtiendrait alors les inégalités suivantes

$$\begin{matrix} (0,0) \\ (0,1) \end{matrix} < (r/2, 0) < (r,n),$$

une contradiction.

Voir les Exercices 9.4 à 9.6 pour d'autres exemples simples de groupes de dimension non réticulés.

EXEMPLE 9.6. Soit G le groupe $\mathbb{Z}$, muni du cône positif $G^+ = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Alors G est un groupe abélien dirigé, sans torsion et 2-perforé. Il ne satisfait *pas* la propriété d'interpolation finie: en effet, dans G,

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \leq \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$

mais il n'existe pas d'élément x de G tel que

$$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \leq x \leq \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Une classe fondamentale d'exemples de groupes de dimension est la classe suivante:

DÉFINITION. Un *groupe simplicial* est un groupe ordonné qui est isomorphe à un certain groupe ordonné $\mathbb{Z}^n$ où n est un entier naturel.

Il est immédiat que tout groupe simplicial est un groupe réticulé, donc un groupe de dimension. Les groupes simpliciaux se caractérisent facilement de façon "abstraite":

DÉFINITION. Soit G un groupe ordonné. Un *atome* de G est un élément strictement positif e de G satisfaisant

$$(\forall x, y \in G^+)\big(x + y = e \Longrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)\big).$$

Il revient donc au même de dire que pour tout élément x de G, $0 \leq x \leq e$ implique que $x = 0$ ou $x = e$.

PROPOSITION 9.7. *Un groupe abélien ordonné G est simplicial si et seulement si G est un groupe de Riesz et G^+ est un monoïde finiment engendré.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons que G est un groupe de Riesz tel que G^+ est un monoïde finiment engendré. Par suite, il existe une partie génératrice (pour la structure de monoïde) finie *minimale* S de G^+. On montre que les éléments de S sont des atomes de G. Pour ce faire, on commence par montrer que S est une partie *incomparable* de G, *i.e.*, si a et b sont deux éléments distincts de S, alors $a \not\leq b$. Supposons en effet au contraire que $a \leq b$. Donc $b - a \geq 0$, donc, puisque S engendre G^+, il existe une décomposition $b - a = \sum_{s \in S} n_s s$ pour une famille $(n_s)_{s \in S}$ d'entiers naturels. Si $n_b > 0$, alors $b \leq b - a$, d'où, puisque $a \geq 0$, $a = 0$, ce qui contredit la minimalité de S ($S \setminus \{0\}$ engendre aussi G^+). Par suite, $n_b = 0$, et donc $b = a + \sum_{s \neq b} n_s s$ appartient au sous-monoïde de G^+ engendré par $S \setminus \{b\}$; par suite, $S \setminus \{b\}$ engendre G^+ en tant que monoïde, ce qui contredit la minimalité de S. Par suite, S est incomparable.

Soit maintenant $e \in S$. Puisque S est une partie génératrice minimale de G^+, $e \neq 0$. De plus, soit $x \in G$ tel que $0 \leq x \leq e$. Puisque $x \in G^+$ et que S engendre G^+, x s'écrit sous la forme $\sum_{s \in S} n_s s$ pour une famille $(n_s)_{s \in S}$ d'entiers naturels. Si tous les n_s sont nuls, alors $x = 0$. Sinon, il existe $s \in S$ tel que $n_s > 0$, d'où $0 < s \leq x$. Par suite, $s \leq e$, d'où, puisque S est incomparable, $s = e$, d'où $x \geq e$, d'où, puisque $x \leq e$, $x = e$. Par suite, nous avons bien montré que les éléments de S sont des atomes de G^+.

Soit maintenant f l'application de $\mathbb{Z}^S$ vers G définie par

$$f \colon x \mapsto \sum_{s \in S} x(s)s.$$

Il est immédiat que f est un homomorphisme de groupes ordonnés. Puisque G^+ est engendré en tant que monoïde par S, l'image de f contient G^+; puisque G est dirigé, f est surjective. Enfin, f est trivialement croissante.

Finalement, soit $x \in \mathbb{Z}^S$ tel que $f(x) \geq 0$; on montre que $x \geq 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas; il existe donc $s_0 \in S$ tel que $x(s_0) \leq -1$. Soit $m = \max\{x(s) \mid s \in S \setminus \{s_0\}\}$. Par suite,

$$s_0 \leq -x(s_0)s_0 \leq \sum_{s \neq s_0} x(s)s \leq m \sum_{s \neq s_0} s,$$

d'où, puisque G^+ satisfait la propriété de raffinement et par la propriété de décomposition de Riesz (Lemme 5.6), il existe une suite finie $(x_i)_{i \in I}$ (avec $I = m \times (S \setminus \{s_0\})$) d'éléments de G^+ tels que chaque x_i est inférieur à un élément de $S \setminus \{s_0\}$ et

$$s_0 = \sum_{i \in I} x_i;$$

par définition d'un atome, tous les x_i sont nuls, d'où $s_0 = 0$, contradiction. Par suite, $x \geq 0$, ce qui permet de conclure que f est un isomorphisme de groupes ordonnés. □

Définition. Une *base simpliciale* d'un groupe simplicial S est une suite finie $(x_i)_{i<n}$ énumérant sans répétition l'ensemble des atomes de S.

Par suite, la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ est une base simpliciale de $\mathbb{Z}^n$. De façon générale, une base simpliciale d'un groupe simplicial est unique à permutation des indices près.

Dans quel sens les groupes simpliciaux sont-ils des exemples fondamentaux de groupes de dimension? Comme nous allons le voir, tout groupe de dimension peut s'obtenir "d'une certaine façon" à partir de groupes simpliciaux. Quelle est la nature de cette construction? Il ne s'agit pas de somme directe, ni de produit direct, ni de réunions croissantes ($\mathbb{R}$ est un contrexemple dans les trois cas; *voir* les Exercices 9.10 et 9.11). Il s'agit d'une généralisation de la réunion croissante, appelée *limite directe* (ou *limite inductive filtrante*). Cette notion se définit en fait dans un cadre *très* général (*groupes*, *anneaux*, *modules*, *corps* tant que l'on ne considère que des limites inductives "filtrantes", *algèbres de Boole*, *groupes (pré)ordonnés*, *groupes réticulés*, *etc.*). Nous allons la définir dans le cas des groupes (pré)ordonnés, en gardant néanmoins cette possibilité de généralisation à l'esprit.

Définition. Un *système direct* de groupes préordonnés est la donnée de deux familles:

— Une famille $(G_i)_{i\in I}$ de groupes préordonnés, indexée par un ensemble dirigé I,
— Une famille $(f_{ij})_{(i,j)\in I\times I,\ i\leq j}$ d'homomorphismes de groupes préordonnés,

telles que

(a) Pour tout $i \in I$, $f_{ii} = \mathrm{id}_{G_i}$,
(b) Pour tous i, j, k dans I tels que $i \leq j \leq k$, $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$. Le diagramme commutatif correspondant est le suivant:

$$\begin{tikzcd} & G_k \\ G_i \arrow[ur, "f_{ik}"] \arrow[r, "f_{ij}"'] & G_j \arrow[u, "f_{jk}"'] \end{tikzcd}$$

Un *système direct avec point à l'infini* est un système direct (notons-le comme ci-dessus) tel que l'ensemble d'indices I admet un plus grand élément.

Notons qu'il suffit de vérifier (b) pour $i < j < k$ dans I. Souvent, pour ne pas alourdir les notations, on notera $((G_i)_i, (f_{ij})_{i\leq j})$ le système direct ci-dessus, l'ensemble d'indices I étant clair d'après le contexte.

Exemple 9.8. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de groupes préordonnés, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'homomorphismes avec $f_n\colon G_n \to G_{n+1}$ pour tout n. Pour tous $m \leq n$ dans $\mathbb{N}$, posons

$$f_{mn} = f_{n-1} \circ \cdots \circ f_{m+1} \circ f_m$$

(donc id_{G_n} pour $m = n$). Alors il est facile de vérifier que $((G_m)_m, (f_{mn})_{m\leq n})$ est un système direct de groupes préordonnés.

Dans le contexte de la définition ci-dessus, si I admet un plus grand élément ∞ et si l'on pose $J = I \setminus \{\infty\}$, on peut poser $G_\infty = G$ et $f_{j\infty} = f_j$ (pour tout $j \in J$), et on peut alors utiliser la notation

$$((G_j)_{j\in J}, (f_{ij})_{i\leq j \text{ dans } J}, G, (f_j)_{j\in J})$$

pour un système direct avec point à l'infini, et dire qu'alors, $(G, (f_i)_{i\in I})$ est *point à l'infini* de $((G_j)_{j\in J}, (f_{ij})_{i\leq j \text{ dans } J})$. Il revient au même de dire que

$$((G_j)_{j\in J}, (f_{ij})_{i\leq j \text{ dans } J})$$

est un système direct et que de plus, pour tous $i \leq j$ dans J, $f_i = f_j \circ f_{ij}$. Les relations de commutation correspondantes sont donc les suivantes:

— Pour $i \leq j \leq k$ dans J, $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$; le diagramme commutatif correspondant est le suivant:

$$\begin{tikzcd} & G_k \\ G_i \arrow[ur, "f_{ik}"] \arrow[r, "f_{ij}"'] & G_j \arrow[u, "f_{jk}"'] \end{tikzcd}$$

— Pour $i \leq j$ dans J, $f_i = f_j \circ f_{ij}$; le diagramme commutatif correspondant est le suivant:

$$\begin{tikzcd} & G \\ G_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f_{ij}"'] & G_j \arrow[u, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

Heuristiquement, la *limite directe* d'un système direct est le "plus petit point à l'infini" de ce système:

Définition. Soit $\mathcal{S} = ((G_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j \text{ dans } I})$ un système direct. Un système $(G, (f_i)_{i\in I})$ est *limite directe* de $\mathcal{S}$ quand c'est un point à l'infini de $\mathcal{S}$ et pour tout point à l'infini $(H, (h_i)_{i\in I})$ de $\mathcal{S}$, il existe *un et un seul* homomorphisme h de G vers H tel que

$$(\forall i \in I)(h_i = h \circ f_i) :$$

$$\begin{tikzcd} & H \\ G_i \arrow[ur, "h_i"] \arrow[r, "f_i"'] & G \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Par abus de langage, on dit souvent que G est une limite directe de $\mathcal{S}$, ou encore que G est une limite directe des G_i.

Proposition 9.9. *La limite directe d'un système direct est unique à isomorphisme près.*

PREUVE. Soient $(G, (f_i)_{i\in I})$ et $(G', (f'_i)_{i\in I})$ deux limites directes d'un système direct $\mathcal{S} = ((G_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j \text{ dans } I})$. Par définition, il existe un seul homomorphisme $f\colon G \to G'$ (resp., $f'\colon G' \to G$) tel que pour tout $i \in I$, $f'_i = f\circ f_i$ (resp., $f_i = f'\circ f'_i$). Par suite, pour tout $i \in I$, $f_i = (f'\circ f)\circ f_i$; mais, par définition de la limite inductive, il existe un seul homomorphisme $\varphi\colon G \to G$ tel que pour tout $i \in I$, $f_i = \varphi \circ f_i$, c'est fatalement l'identité: par suite, $f' \circ f = \mathrm{id}_G$. De même, $f \circ f' = \mathrm{id}_{G'}$. Par suite, f et f' sont deux isomorphismes, inverses l'un de l'autre, satisfaisant, pour tout $i \in I$, $f'_i = f \circ f_i$ et $f_i = f' \circ f'_i$. □

LEMME 9.10. *Soit $\mathcal{S} = ((G_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j \text{ dans } I})$ un système direct de groupes préordonnés. Alors il existe un point à l'infini $(G, (f_i)_{i\in I})$ de $\mathcal{S}$ tel que:*

(i) *G est un groupe préordonné;*
(ii) *$G = \bigcup_{i\in I} f_i[G_i]$;*
(iii) *$G^+ = \bigcup_{i\in I} f_i[G_i^+]$;*
(iv) *Pour tout $i \in I$, $\operatorname{Ker} f_i = \bigcup_{j\geq i} \operatorname{Ker} f_{ij}$.*

PREUVE. Soit $\mathcal{G} = \bigcup_{i\in I}\{i\} \times G_i$. On définit sur $\mathcal{G}$ une relation binaire $\sim$ en posant

$$(i, x) \sim (j, y) \Leftrightarrow \left(\exists k \geq \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right) \big(f_{ik}(x) = f_{jk}(y)\big).$$

Notons alors que dans le contexte ci-dessus, pour tout $l \geq k$, nous obtenons aussi $f_{il}(x) = f_{kl} \circ f_{ik}(x) = f_{kl} \circ f_{jk}(y) = f_{jl}(y)$; ainsi, $(i, x) \sim (j, y)$ si et seulement si pour tout k assez grand dans I, $f_{ik}(x) = f_{jk}(y)$. En utilisant ce fait et le fait que I est dirigé, on obtient facilement que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{G}$. Posons alors $G = \mathcal{G}/\sim$; pour tout $(i, x) \in \mathcal{G}$, posons

$$f_i(x) = [i, x] = \text{classe d'équivalence de } (i, x) \text{ modulo } \sim .$$

Notons que pour tout $j \geq i$, $[i, x] = [j, f_{ij}(x)]$; par suite, on obtient immédiatement le

FAIT 1. *L'égalité $G = \bigcup_{i\in I} f_i[G_i]$ a lieu. De plus, pour tous $i \leq j$ dans I, $f_i = f_j \circ f_{ij}$.*

Donnons à G une structure de groupe préordonné. Pour ce faire, nous aurons besoin du Fait suivant, dont la vérification est immédiate:

FAIT 2. *Soient i, i' dans I, x, $y \in G_i$ et x', $y' \in G_{i'}$. Alors*

$$\big((i, x) \sim (i', x') \text{ et } (i, y) \sim (i', y')\big) \Rightarrow (i, x + y) \sim (i', x' + y').$$ □ Fait 2.

Ceci permet de définir une *fonction* $+$ de $G\times G$ vers G en posant $[i, x]+[i, y] = [i, x+y]$; cette fonction est en fait définie en tout point de $G\times G$, car pour tous (i, x) et (j, y) dans $\mathcal{G}$ et pour tout $k \geq \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$, $(i, x) \sim (k, f_{ik}(x))$ et $(j, y) \sim (k, f_{jk}(y))$, d'où $G \times G = \bigcup_{i\in I} f_i[G] \times f_i[G]$. Il est alors immédiat que $+$ est associative, d'élément neutre $\mathbf{0} = [0, 0_{G_i}]$ (ne dépend pas de l'indice i) et que pour tout $(i, x) \in \mathcal{G}$, l'inverse de $[i, x]$ est $[i, -x]$. Bref,

FAIT 3. *$(G, +, \mathbf{0})$ est un groupe.*

Puis on pose, par définition,

$$G^+ = \bigcup_{i\in I} f_i[G_i^+],$$

ce qui règle du même coup le cas de la condition (iii).

Il est alors facile de vérifier que G^+ est un sous-monoïde distingué de $(G, +, 0)$; ainsi, G est muni d'une structure de groupe préordonné.

Par définition de G^+, tous les f_i sont des homomorphismes de groupes préordonnés. Il reste à régler le point (iv). Soit donc $i \in I$. Puisque pour tout $j \geq i$, $f_i = f_j \circ f_{ij}$, il vient que $\bigcup_{j \geq i} \operatorname{Ker} f_{ij} \subseteq \operatorname{Ker} f_i$. Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} f_i$. Par définition, $[i, x] = [i, 0_{G_i}]$, il existe donc $j \geq i$ tel que $f_{ij}(x) = 0$, *i.e.*, $x \in \operatorname{Ker} f_{ij}$; d'où (iv). □

Proposition 9.11. *Soit* $\mathcal{S} = ((G_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I})$ *un système direct de groupes préordonnés, soit* $(G, (f_i)_{i \in I})$ *un point à l'infini de* $\mathcal{S}$ *(*G *est un groupe préordonné et les* f_i *sont des homomorphismes de groupes préordonnés). Alors* $(G, (f_i)_{i \in I})$ *est une limite directe de* $\mathcal{S}$ *si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées:*

(a) $G = \bigcup_{i \in I} f_i[G_i]$;
(b) $G^+ = \bigcup_{i \in I} f_i[G_i^+]$;
(c) *Pour tout* $i \in I$, $\operatorname{Ker} f_i = \bigcup_{j \geq i} \operatorname{Ker} f_{ij}$.

Preuve. Supposons d'abord que (a), (b), et (c) soient réalisées. Soit $(H, (h_i)_{i \in I})$ un point à l'infini de $\mathcal{S}$. Par le point (a), il existe *au plus* une application $h \colon G \to H$ telle que pour tout $i \in I$, $h \circ f_i = h_i$. Montrons maintenant l'existence de h. Il est indispensable de définir h par $h(f_i(x)) = h_i(x)$ (pour tout $i \in I$ et tout $x \in G_i$). Pour montrer qu'une telle définition est cohérente, il suffit de (et il faut) montrer que pour tous $i, j \in I$ et tous $x \in G_i$, $y \in G_j$, $f_i(x) = f_j(y)$ entraîne que $h_i(x) = h_j(y)$. Puisque I est dirigé, il existe $k \in I$ tel que $k \geq \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$. Par suite, on obtient $f_k(f_{ik}(x)) = f_k(f_{jk}(y))$, d'où $f_{ik}(x) - f_{jk}(y) \in \operatorname{Ker} f_k$. Par (c), il existe donc $l \geq k$ tel que $f_{ik}(x) - f_{jk}(y) \in \operatorname{Ker} f_{kl}$; par suite, $f_{il}(x) = f_{jl}(y)$, d'où $h_l \circ f_{il}(x) = h_l \circ f_{jl}(y)$, *i.e.*, $h_i(x) = h_j(y)$. Ceci montre donc qu'il existe une (et une seule) application h de G vers H telle que pour tout $i \in I$, $h_i = h \circ f_i$.

Il est alors facile de vérifier que h est un homomorphisme de groupes. De plus, si $\xi \in G^+$, alors, par (b), il existe $i \in I$ et $x \in G_i^+$ tels que $\xi = f_i(x)$, d'où $h(\xi) = h_i(x) \in H^+$: donc h est un homomorphisme de groupes préordonnés.

Réciproquement, supposons que $(G, (f_i)_{i \in I})$ soit limite directe de $\mathcal{S}$. Soit $(H, (h_i)_{i \in I})$ le système construit dans le Lemme 9.10; par le Lemme 9.10, $(H, (h_i)_{i \in I})$ satisfait (a), (b), et (c). *Par ce qui précède,* $(H, (h_i)_{i \in I})$ *est donc lui aussi une limite directe de* $\mathcal{S}$. Par la Proposition 9.9, il existe donc un (unique) *isomorphisme* $h \colon G \to H$ tel que pour tout $i \in I$, $h_i = h \circ f_i$; cet isomorphisme permet alors facilement de transférer (a), (b), et (c) (satisfaits par $(H, (h_i)_{i \in I})$) au système $(G, (f_i)_{i \in I})$. □

Le résultat d'unicité démontré dans la Proposition 9.9 permet de parler de "la" limite directe plutôt que d'"une" limite directe d'un système de groupes ordonnés. Plus précisément, nous appellerons *la* limite directe d'un système le système construit dans la preuve du Lemme 9.10, et nous noterons alors

$$(G, (f_i)_{i \in I}) = \varinjlim((G_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I}),$$

et *une* limite directe toute limite directe de ce système, qui est donc isomorphe à l'objet précédent—la notation $\varinjlim$ ci-dessus est encore largement acceptable dans ce

cas. Une notation plus simple souvent utilisée (mais en tout état de cause abusive) pour cela est la notation

$$G = \varinjlim_{i \in I} G_i,$$

qui est néanmoins tolérable quand les f_{ij} et les f_i sont soit clairs par le contexte, soit peu importants.

Comme mentionné auparavant, ces résultats se généralisent dans un contexte extrêmement vaste, à des modifications mineures près (essentiellement, les conditions (a), (b), et (c) changent).

Exemple 9.12. Soit G un groupe préordonné, soit I un ensemble ordonné dirigé et soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille *croissante* (pour l'inclusion) de sous-groupes de G, telle que $\bigcup_{i \in I} G_i = G$. Alors $G = \varinjlim_{i \in I} G_i$, dans un sens naturel: pour tous $i \leq j$ dans I, observons que $G_i \subseteq G_j$, et prenons donc pour f_{ij} l'*inclusion* de G_i dans G_j; de même, pour tout $i \in I$, prenons pour f_i l'inclusion de G_i dans G. Il est alors trivial de vérifier les conditions (a), (b), et (c) de la Proposition 9.11. Par suite,

$$(G, (f_i)_{i \in I}) = \varinjlim((G_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I}),$$

mais il est compréhensible que dans ce contexte, l'on néglige de mentionner les homomorphismes...

Cependant, bien que la notion de limite directe puisse être considérée comme une généralisation naturelle de l'exemple ci-dessus, ce dernier est loin d'en être la forme la plus générale. Par exemple, les f_{ij} ou les f_i peuvent très bien ne pas être injectifs! Cependant, si les f_{ij} sont injectifs (resp., des plongements), alors les f_i sont également injectifs (resp., des plongements):

Corollaire 9.13. *Soit $\mathcal{S} = ((G_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I})$ un système direct de groupes préordonnés, soit $(G, (f_i)_{i \in I})$ une limite directe de $\mathcal{S}$. Si tous les homomorphismes f_{ij} $(i \leq j)$ sont injectifs (resp., des plongements), alors tous les f_i sont injectifs (resp., des plongements).*

Preuve. Le premier énoncé résulte immédiatement de la Proposition 9.11 (condition (c)). Supposons maintenant que tous les f_{ij} ($i \leq j$ dans I) sont des plongements. Soit $i \in I$. Nous savons déjà que f_i est un homomorphisme injectif de groupes préordonnés. Pour montrer que f_i est un plongement, il suffit donc de montrer que pour tout $x \in G_i$, $f_i(x) \geq 0$ entraîne que $x \geq 0$. Or, par la condition (b), il existe $j \in I$ et $y \in G_j^+$ tel que $f_i(x) = f_j(y)$. Puisque I est dirigé, il existe $k \in I$ tel que $k \geq \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$. Par suite, $f_{ik}(x) - f_{jk}(y)$ appartient à $\operatorname{Ker} f_k$, donc à $\operatorname{Ker} f_{kl}$ pour un certain $l \geq k$ dans I (condition (c)); par suite, $f_{kl}(f_{ik}(x) - f_{jk}(y)) = 0$, soit $f_{il}(x) = f_{jl}(y)$; mais $y \in G_j^+$ et f_{jl} est un homomorphisme de groupes préordonnés, d'où $f_{il}(x) \geq 0$; par suite, puisque f_{il} est un plongement de groupes préordonnés, il vient $x \geq 0$, ce qui achève la preuve. □

Corollaire 9.14. *Soit $\mathcal{S} = ((G_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I})$ un système direct de groupes ordonnés, soit $(G, (f_i)_{i \in I})$ une limite directe de $\mathcal{S}$. Alors G est un groupe ordonné.*

On peut énoncer ceci comme "toute limite directe de groupes ordonnés est un groupe ordonné".

Preuve. Soit $g \in G^+ \cap (-G^+)$. Par le point (b), il existe i et j dans I et $x \in G_i^+$ et $y \in G_j^+$ tels que $g = f_i(x) = -f_j(y)$. Soit $k \geq \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$ dans I. Alors on peut écrire $g = f_k(f_{ik}(x)) = -f_k(f_{jk}(y))$, d'où $f_k(f_{ik}(x) + f_{jk}(y)) = 0$; par (c), il existe donc $l \geq k$ tel que $f_{kl}(f_{ik}(x) + f_{jk}(y)) = 0$; par suite, $f_{il}(x) = -f_{jl}(y)$; puisque $x \in G_i^+$ et $y \in G_j^+$ et f_{il} et f_{jl} sont des homomorphismes croissants, on a donc $f_{il}(x) = f_{jl}(y) = 0$, d'où $g = f_l \circ f_{il}(x) = 0$. Ainsi, $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$. □

Une preuve similaire, mais plus simple, donne immédiatement le Corollaire suivant:

Corollaire 9.15. *Toute limite directe de groupes abéliens préordonnés est un groupe abélien préordonné.*

Preuve. Soit

$$(G, (f_i)_{i \in I}) = \varinjlim((G_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I})$$

avec les G_i abéliens préordonnés. Soient a et b dans G. Il existe $i, j \in I$ et $x \in G_i$ et $y \in G_j$ tels que $a = f_i(x)$ et $b = f_j(y)$. Puisque I est dirigé, il existe $k \in I$ tel que $k \geq \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$. Par suite, $a = f_k(x')$ et $b = f_k(y')$ avec $x' = f_{ik}(x)$ et $y' = f_{jk}(y)$. Par suite, $a + b = f_k(x' + y') = f_k(y' + x') = b + a$. □

Il est en fait possible de démontrer une grande variété d'énoncés de la sorte, avec des preuves (tout aussi faciles) du même style... nous aurons juste besoin du suivant:

Corollaire 9.16. *Toute limite directe de groupes de dimension est un groupe de dimension.*

Preuve. Soit

$$(G, (f_i)_{i \in I}) = \varinjlim((G_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I})$$

avec les G_i abéliens ordonnés, les G_i étant des groupes de dimension. Tout d'abord, d'après les Corollaires 9.14 et 9.15, G lui-même est un groupe abélien ordonné. Pour tout $a \in G$, il existe $i \in I$ et $x \in G_i$ tels que $a = f_i(x)$ (condition (a)); puisque G_i est dirigé, il existe $y \in G_i^+$ tel que $x \leq y$; par suite, $\begin{matrix} 0 \\ a \end{matrix} \leq f_i(y)$, et G est donc dirigé. Pour continuer nous aurons besoin du Fait suivant:

Fait 1. *Pour tout $i \in I$ et tout $x \in G_i$, $f_i(x) \geq 0$ si et seulement si il existe $j \geq i$ tel que $f_{ij}(x) \geq 0$.*

Preuve du Fait. Il est évident que la condition est suffisante. Réciproquement, supposons que $f_i(x) \geq 0$. Par définition de G^+, il existe $j \in I$ et $y \in G_j^+$ tel que $f_i(x) = f_j(y)$. Puisque I est dirigé, il existe $k \in I$ tel que $k \geq \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$. Par suite, $f_{ik}(x) - f_{jk}(y)$ appartient à $\operatorname{Ker} f_k$, donc à $\operatorname{Ker} f_{kl}$ pour un certain $l \geq k$ dans I (condition (c)); par suite, $f_{kl}(f_{ik}(x) - f_{jk}(y)) = 0$, soit $f_{il}(x) = f_{jl}(y)$; mais $y \in G_j^+$ et f_{jl} est un homomorphisme de groupes préordonnés, donc $f_{il}(x) \geq 0$. □ Fait.

Puis soient a_0, a_1, b_0, et b_1 dans G tels que $\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}$. En appliquant le fait que I est dirigé, puis le Fait ci-dessus, on obtient facilement l'existence de $i \in I$ et x_0, x_1,

y_0, et y_1 dans G tels que pour tout $\nu < 2$, $a_\nu = f_i(x_\nu)$ et $b_\nu = f_i(y_\nu)$, et $\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix} \leq \begin{matrix} y_0 \\ y_1 \end{matrix}$. Puisque G_i est un groupe d'interpolation, il existe $z \in G_i$ tel que $\begin{matrix} x_0 \\ x_1 \end{matrix} \leq z \leq \begin{matrix} y_0 \\ y_1 \end{matrix}$; par suite, nous obtenons aussi $\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq c \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}$ avec $c = f_i(z)$.

Enfin, montrons que G est non perforé. Puisque G est abélien, il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $a \in G$, $ma \geq 0$ implique que $a \geq 0$. Il existe $i \in I$ et $x \in G_i$ tels que $a = f_i(x)$. Par suite, $f_i(mx) \geq 0$, d'où, par le Fait ci-dessus, l'existence de $j \geq i$ dans I tel que $f_{ij}(mx) \geq 0$, soit $mf_{ij}(x) \geq 0$; puisque G_j est non perforé, $f_{ij}(x) \geq 0$, d'où $a = f_j \circ f_{ij}(x) \geq 0$. □

En fait, les Corollaires de 9.14 à 9.16 sont des cas particuliers d'un énoncé de préservation beaucoup plus général, qui permet en fait de décider ces Corollaires du premier coup d'œil, mais dont la formulation nécessite la connaissance des définitions les plus basiques de la théorie des modèles, *voir* l'Exercice 9.12.

Une conséquence particulière du Corollaire 9.16 est que *toute limite directe de groupes simpliciaux est un groupe de dimension.* Ce qui est surprenant est que la réciproque est vraie—c'est cela, le théorème d'Effros, Handelman, et Shen.

Définition. Un *système linéaire* est un ensemble fini d'équations (considérées par exemple comme des objets formels) de la forme

$$\Sigma\colon \begin{cases} p_{11}\mathbf{x}_1 + p_{12}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{1n}\mathbf{x}_n & = 0 \\ p_{21}\mathbf{x}_1 + p_{22}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{2n}\mathbf{x}_n & = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ p_{m1}\mathbf{x}_1 + p_{m2}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{mn}\mathbf{x}_n & = 0 \end{cases}$$

où les p_{ij} sont des entiers relatifs. Si M est un sous-monoïde d'un groupe abélien G, une *solution* de Σ dans M est un élément de M^n qui satisfait les équations de Σ.

Remarquons que dans le contexte de la définition ci-dessus, si $\vec{q} = (q_i)_{i<m}$ est une solution de Σ dans $\mathbb{N}$, alors pour tout groupe abélien préordonné G et tout $t \in G^+$, $\vec{q}t = (q_i t)_{i<m}$ est une solution de Σ dans G^+. Par suite, toute combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{N}$) de solutions du type $\vec{q}t$ comme ci-dessus est encore une solution de Σ dans G^+. Si *toutes* les solutions de Σ dans *tous* les cônes positifs de groupes préordonnés d'une certaine classe $\mathcal{G}$ (qui sera par la suite la classe des groupes de dimension) sont de cette forme, nous dirons alors avoir obtenu un *paramétrage* des solutions de Σ dans [les objets de] $\mathcal{G}$:

Définition. Soit

$$\Sigma\colon \begin{cases} p_{11}\mathbf{x}_1 + p_{12}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{1n}\mathbf{x}_n & = 0 \\ p_{21}\mathbf{x}_1 + p_{22}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{2n}\mathbf{x}_n & = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ p_{m1}\mathbf{x}_1 + p_{m2}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{mn}\mathbf{x}_n & = 0 \end{cases}$$

un système linéaire et soit $\mathcal{G}$ une classe de groupes préordonnés. Un *paramétrage* de Σ dans $\mathcal{G}$ est un système linéaire de la forme suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = q_{11}\mathbf{t}_1 & +q_{12}\mathbf{t}_2 + \cdots & +q_{1N}\mathbf{t}_N \\ \mathbf{x}_2 = q_{21}\mathbf{t}_1 & +q_{22}\mathbf{t}_2 + \cdots & +q_{2N}\mathbf{t}_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}_n = q_{n1}\mathbf{t}_1 & +q_{n2}\mathbf{t}_2 + \cdots & +q_{nN}\mathbf{t}_N \end{cases}$$

où N et les q_{ij} sont des entiers *naturels*, tel que pour tout G dans $\mathcal{G}$, les solutions de Σ dans G^+ sont exactement les sommes finies

$$\vec{x} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{q}_\nu t_\nu$$

où l'on pose $\vec{q}_\nu = (q_{i\nu})_{i<n}$ et les t_ν sont des éléments de G^+.

Ainsi, un paramétrage de Σ dans $\mathcal{G}$ est une expression de la *solution générale* de Σ dans les cônes positifs des éléments de $\mathcal{G}$.

Notons que si $\mathbb{Z}$ est dans la classe $\mathcal{G}$, ce qui sera le cas pour la classe des groupes de dimension, les $\vec{q}_\nu$ eux-mêmes sont solutions de Σ (poser $t_\xi = 1$ si $\xi = \nu$, 0 sinon). Le Lemme fondamental dans la preuve du théorème d'Effros, Handelman, et Shen est aussi celui qui concentre toute l'information de nature "arithmétique" et "calculatoire" de ce résultat:

Lemme 9.17. *Toute équation linéaire est paramétrable dans la classe des groupes de dimension, et ceci de manière calculable.*

Preuve. Soit $\mathcal{D}$ la classe des groupes de dimension. Nous allons paramétrer dans $\mathcal{D}$ une équation linéaire donnée

$$p_1\mathbf{x}_1 + \cdots + p_n\mathbf{x}_n = 0, \tag{9.1}$$

où les p_i sont des entiers relatifs. Si tous les p_i sont de même signe (éventuellement nuls), un paramétrage de (9.1) est évidemment

$$\mathbf{x}_i = 0 \qquad (\text{tout } i \in I)$$

où $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid p_i \neq 0\}$. Dans le cas général, associons à l'équation (9.1) un *degré*, qui sera, par définition, (p, l), où

$$\begin{aligned} p &= \max\{|p_1|, \ldots, |p_n|\}, \\ l &= \text{nombre de } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tels que } p = |p_i|. \end{aligned}$$

Nous allons construire un paramétrage de (9.1) dans $\mathcal{D}$, par récurrence sur (p, l) ordonné lexicographiquement (*i.e.*, par récurrence d'abord sur $p \in \mathbb{N}$, puis sur $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Pour $p = 0$, tous les p_i sont nuls, cas que nous avons déjà considéré. Supposons donc que (9.1) ait pour degré (p, l) avec $p > 0$ et que l'on ait paramétré tous les systèmes linéaires de degré strictement inférieur à (p, l). Puisque nous avons déjà considéré le cas où tous les p_i sont de même signe (ou nuls), nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il existe au moins deux indices i et j tels que $p_i > 0$ et $p_j < 0$.

Quitte à renuméroter les $(p_i, \mathbf{x}_i)$ et à changer le signe de (9.1), on peut supposer sans perte de généralité que $p = p_1$ et qu'il existe $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\})(p_i \geq 0),$$
$$(\forall i \in \{m+1, \dots, n\})(p_i < 0).$$

Pour tous éléments positifs $x_1, \dots, x_n$ du cône positif d'un groupe de dimension G satisfaisant (9.1), *i.e.*, $p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = 0$,

$$\begin{aligned} p x_1 = p_1 x_1 &\leq p_1 x_1 + \cdots + p_m x_m \\ &= -p_{m+1} x_{m+1} - \cdots - p_n x_n \\ &\leq p(x_{m+1} + \cdots + x_n), \end{aligned}$$

d'où, puisque G est non p-perforé, $x_1 \leq x_{m+1} + \cdots + x_n$. Puisque $x_1, x_{m+1}, \dots, x_n$ sont tous positifs, il existe, par la propriété de décomposition de Riesz, des éléments z_i $(m+1 \leq i \leq n)$ de G^+ tels que $x_1 = \sum_{i=m+1}^n z_i$ et pour tout $i \in \{m+1, \dots, n\}$, $z_i \leq x_i$. La relation à satisfaire entre les x_i et les z_i est alors la suivante:

$$p \sum_{i=m+1}^n z_i + \sum_{i=2}^n p_i x_i = 0,$$

c'est à dire

$$\sum_{i=m+1}^n (p + p_i) z_i + \sum_{i=2}^m p_i x_i + \sum_{i=m+1}^n p_i (x_i - z_i) = 0.$$

Or, pour $m+1 \leq i \leq n$, tous les $p + p_i$ appartiennent à l'intervalle $\{0, 1, \dots, p-1\}$, et le nombre de fois où p figure dans $\{|p_2|, \dots, |p_n|\}$ est exactement $l - 1$; par suite, le degré de l'équation

$$\sum_{i=m+1}^n (p + p_i) \mathbf{u}_i + \sum_{i=2}^m p_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=m+1}^n p_i \mathbf{w}_i = 0 \tag{9.2}$$

est soit $(p, l-1)$, soit de la forme (p', l') où $p' < p$, donc dans tous les cas, il est strictement inférieur à (p, l). Par suite, (9.2) est paramétrable. Soit donc

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = r_{i1} \mathbf{y}_1 & + \cdots + r_{iN} \mathbf{y}_N & (m+1 \leq i \leq n) \\ \mathbf{v}_i = s_{i1} \mathbf{y}_1 & + \cdots + s_{iN} \mathbf{y}_N & (2 \leq i \leq m) \\ \mathbf{w}_i = s_{i1} \mathbf{y}_1 & + \cdots + s_{iN} \mathbf{y}_N & (m+1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

un paramétrage de (9.2) dans $\mathcal{D}$. Un paramétrage de (9.1) dans $\mathcal{D}$ s'obtient alors en posant $\mathbf{z}_i = \mathbf{u}_i$ $(m+1 \leq i \leq n)$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{v}_i$ $(2 \leq i \leq m)$, $\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i = \mathbf{w}_i$ $(m+1 \leq i \leq n)$ et en résolvant en $\mathbf{x}$, sans oublier que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{z}_{m+1} + \cdots + \mathbf{z}_n$. Il est alors facile de voir que l'on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i = & s_{i1} \mathbf{y}_1 + & \cdots + s_{iN} \mathbf{y}_N & (2 \leq i \leq m) \\ \mathbf{x}_i = & (r_{i1} + s_{i1}) \mathbf{y}_1 + & \cdots + (r_{iN} + s_{iN}) \mathbf{y}_N & (m+1 \leq i \leq n) \\ \mathbf{x}_1 = & \left(\sum_{i=m+1}^n r_{i1} \right) \mathbf{y}_1 + & \cdots + \left(\sum_{i=m+1}^n r_{iN} \right) \mathbf{y}_N & \end{cases} \tag{9.3}$$

(nous n'utiliserons plus le paramétrage donnant les $\mathbf{z}_i$, en l'occurrence $\mathbf{z}_i = r_{i1} \mathbf{y}_1 + \cdots + r_{iN} \mathbf{y}_N$ pour $m+1 \leq i \leq n$). Quelle est l'interprétation de ce résultat? Elle est que dans tout cône positif d'un groupe de dimension, toute solution de (9.1) est nécessairement de la forme (9.3). Le fait que cette condition soit également suffisante

revient à dire que nous n'avons "oublié" aucune relation entre les x_i et les z_i; de façon pratique, il s'agit de vérifier que les vecteurs colonnes de (9.3) vérifient l'équation (9.1). Mais ceci est un simple calcul sans surprise, qui n'utilise que la définition des r_{ij} et des s_{ij}, et qui montre finalement que (9.3) est le paramétrage recherché. □

Le Corollaire suivant ne sera pas directement appliqué à la preuve du théorème d'Effros, Handelman, et Shen, mais il vaut cependant la peine d'être formulé:

Corollaire 9.18. *Tout système linéaire est paramétrable dans la classe des groupes de dimension, ceci de façon calculable.*

Preuve. Soit

$$\Sigma\colon \begin{cases} p_{11}\mathbf{x}_1 + p_{12}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{1n}\mathbf{x}_n & = 0 \\ p_{21}\mathbf{x}_1 + p_{22}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{2n}\mathbf{x}_n & = 0 \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ p_{m1}\mathbf{x}_1 + p_{m2}\mathbf{x}_2 & + \cdots + p_{mn}\mathbf{x}_n & = 0 \end{cases}$$

un système linéaire. Nous construisons, par récurrence sur le nombre m d'équations, un paramétrage de Σ dans la classe $\mathcal{D}$ des groupes de dimension. Pour $m = 1$ il s'agit du Lemme 9.17. Supposons avoir montré le résultat au rang $m - 1$ (avec $m \geq 2$), et considérons un système à m équations comme ci-dessus. Soit

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = q_{11}\mathbf{y}_1 & + q_{12}\mathbf{y}_2 + \cdots & + q_{1N}\mathbf{y}_N \\ \mathbf{x}_2 = q_{21}\mathbf{y}_1 & + q_{22}\mathbf{y}_2 + \cdots & + q_{2N}\mathbf{y}_N \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ \mathbf{x}_n = q_{n1}\mathbf{y}_1 & + q_{n2}\mathbf{y}_2 + \cdots & + q_{nN}\mathbf{y}_N \end{cases}$$

un paramétrage de l'équation $p_{11}\mathbf{x}_1 + p_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + p_{1n}\mathbf{x}_n = 0$. Substituons aux $\mathbf{x}_i$ les expressions $q_{i1}\mathbf{y}_1 + q_{i2}\mathbf{y}_2 + \cdots + q_{iN}\mathbf{y}_N$ figurant dans le paramétrage ci-dessus. Les $m - 1$ dernières équations figurant dans Σ deviennent un système Σ' de $m - 1$ équations d'inconnues $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_N$. Par hypothèse de récurrence, Σ' est paramétrable dans $\mathcal{D}$. La substitution des expressions obtenues (par ce paramétrage) pour les $\mathbf{y}_i$ dans $\mathbf{x}_i = q_{i1}\mathbf{y}_1 + q_{i2}\mathbf{y}_2 + \cdots + q_{iN}\mathbf{y}_N$ $(1 \leq i \leq n)$ donne alors un paramétrage de Σ dans $\mathcal{D}$. □

C'est donc ce Corollaire 9.18, ainsi que l'algorithme sous-jacent, qui donne un moyen de résoudre dans les cônes positifs de groupes de dimension (en particulier, dans $\mathbb{N}$) tout système linéaire à coefficients entiers. L'algorithme décrit ici, quoiqu'*a priori* peu performant, est tout à fait praticable dans des cas "de petit degré"; *voir* les Exercices 9.13 et 9.14, et en imaginer (des tas) d'autres du même type!

Lemme 9.19. *Soit G un groupe de dimension, soit S un groupe simplicial, soit $f\colon S \to G$ un homomorphisme de groupes ordonnés et soit $a \in \operatorname{Ker} f$. Alors il existe un groupe simplicial T et des homomorphismes de groupes ordonnés $\varphi\colon S \to T$ et $g\colon T \to G$ tels que $f = g \circ \varphi$ et $a \in \operatorname{Ker} \varphi$:*

$$\begin{tikzcd} & G \\ S \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] & T \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Preuve. Soit $(u_i)_{i<m}$ une base simpliciale de S, et posons $x_i = f(u_i)$ pour tout $i < m$. Il existe $(p_i)_{i<m} \in \mathbb{Z}^m$ tel que $a = \sum_{i<m} p_i u_i$. Par suite,

$$0 = f(a) = \sum_{i<m} p_i x_i.$$

Par le Lemme 9.17, il existe un paramétrage de l'équation $\sum_{i<m} p_i \mathbf{x}_i = 0$ dans la classe des groupes de dimension. Fixons-nous un tel paramétrage:

$$\Big\{ \mathbf{x}_i = \textstyle\sum_{j<n} q_{ij} \mathbf{y}_j \quad (\text{tout } i < m)$$

(avec n et les q_{ij} dans $\mathbb{N}$). Puisque G est un groupe de dimension, il existe donc y_j $(j < n)$ dans G^+ tels que pour tout $i < m$, $x_i = \sum_{j<n} q_{ij} y_j$.

Posons alors $T = \mathbb{Z}^n$, soit $(v_j)_{j<n}$ la base canonique de T. On peut définir deux homomorphismes $\varphi\colon S \to T$ et $g\colon T \to G$ par

$$(\forall i < m) \left(\varphi(u_i) = \sum_{j<n} q_{ij} v_j \right),$$
$$(\forall j < n) \big(g(v_j) = y_j \big).$$

Il est immédiat que φ et g sont des homomorphismes de groupes ordonnés. De plus, pour tout $i < m$, $g \circ \varphi(u_i) = \sum_{j<n} q_{ij} y_j = x_i = f(u_i)$, et par suite $g \circ \varphi = f$. Enfin,

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \sum_{i<m} p_i \varphi(u_i) \\ &= \sum_{i<m} \left(p_i \sum_{j<n} q_{ij} v_j \right) \\ &= \sum_{j<n} \left(\sum_{i<m} p_i q_{ij} \right) v_j \\ &= 0, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que pour tout $j < n$, le "vecteur" $(q_{ij})_{i<m}$ est solution de l'équation $\sum_{i<m} p_i \mathbf{x}_i = 0$. □

Le Lemme suivant est un analogue "global" du Lemme 9.19—c'est-à-dire pour tous les éléments de $\operatorname{Ker} f$. La signification intuitive de son énoncé est que si S est un groupe simplicial, G un groupe de dimension et $f\colon S \to G$ est un homomorphisme de groupes ordonnés, alors l'on peut "approximer" f par un homomorphisme de groupes ordonnés de S vers un groupe simplicial T; c'est donc le groupe simplicial T qui approxime parfaitement ("du point de vue de f") le groupe de dimension G.

LEMME 9.20. *Soit G un groupe de dimension, soit S un groupe simplicial, soit $f\colon S \to G$ un homomorphisme de groupes ordonnés. Alors il existe un groupe simplicial T et des homomorphismes de groupes ordonnés $\varphi\colon S \to T$ et $g\colon T \to G$ tels que $f = g \circ \varphi$ et* $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker} f$.

PREUVE. Montrons d'abord que *pour tout sous-groupe A de* $\operatorname{Ker} f$, *il existe un groupe simplicial T et deux homomorphismes de groupes ordonnés $\varphi\colon S \to T$ et $g\colon T \to G$ tels que $f = g \circ \varphi$ et $A \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.*

Notons que A est un sous-groupe de S qui est lui-même un groupe abélien libre finiment engendré, il est donc lui-même [libre et] finiment engendré; par suite, il suffit de raisonner par récurrence sur le rang de A (*i.e.*, l'unique entier naturel r tel que A soit isomorphe—en tant que groupe—à $\mathbb{Z}^r$). Pour $A = \{0\}$, il suffit de prendre $T = S$, $\varphi = \mathrm{id}_S$ et $g = f$. Supposons avoir démontré notre assertion pour tout A de rang strictement inférieur à r (avec $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) et prenons maintenant A de rang r. Par suite, il existe $a \in A$ et un sous-groupe A' de A de rang $r-1$ tels que $A = A' + \mathbb{Z}a$. Par hypothèse de récurrence, il existe un groupe simplicial S' et deux homomorphismes de groupes ordonnés $\varphi'\colon S \to S'$ et $f'\colon S' \to G$ tels que $f = f' \circ \varphi'$ et $A' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi'$. Mais puisque $a \in \operatorname{Ker} f$, $0 = f(a) = f'(\varphi'(a)) = 0$, donc $\varphi'(a) \in \operatorname{Ker} f'$ et donc, par le Lemme 9.19, il existe un groupe simplicial T et deux homomorphismes de groupes ordonnés $\psi\colon S' \to T$ et $g\colon T \to G$ tels que $f' = g \circ \psi$ et $\varphi'(a) \in \operatorname{Ker}\psi$.

Posons alors $\varphi = \psi \circ \varphi'$. Puisque $A' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi'$ et $\varphi'(a) \in \operatorname{Ker}\psi$, il vient $A \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. De plus, $g \circ \varphi = g \circ \psi \circ \varphi' = f' \circ \varphi' = f$.

Ainsi, notre assertion de départ est démontrée. Notre Lemme n'en est que le cas particulier $A = \operatorname{Ker} f$. □

On en déduit alors le théorème d'Effros, Handelman, et Shen:

THÉORÈME 9.21. *Les groupes de dimension sont exactement les limites directes de groupes simpliciaux.*

PREUVE. Le sens facile est fourni immédiatement par le Corollaire 9.16: puisque toute limite directe de groupes de dimension est un groupe de dimension (et que les groupes simpliciaux eux-mêmes sont des groupes de dimension), toute limite directe de groupes simpliciaux est un groupe de dimension.

Réciproquement, soit G un groupe de dimension. Nous allons construire un système direct de groupes simpliciaux dont une limite directe est G (avec des homomorphismes idoines).

Notre ensemble d'indices sera l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties *finies non vides* de G^+, muni de l'inclusion. Il est trivial que $(\mathcal{A}, \subseteq)$ est un ensemble ordonné dirigé. Puis on construit pour tout $A \in \mathcal{A}$, par récurrence sur le cardinal de A, un groupe simplicial G_A, un homomorphisme de groupes ordonnés $g_A\colon G_A \to G$ et des homomorphismes de groupes ordonnés $h_{BA}\colon G_B \to G_A$ pour tout $B \subsetneqq A$ dans $\mathcal{A}$ satisfaisant les conditions suivantes (qui seront prises comme hypothèses de récurrence):

(a) $A \subseteq g_A[G_A^+]$;
(b) $g_A \circ h_{BA} = g_B$ pour tout $B \subsetneqq A$ dans $\mathcal{A}$;
(c) pour tous C, B dans $\mathcal{A}$ avec $C \subsetneqq B \subsetneqq A$, $h_{CA} = h_{BA} \circ h_{CB}$;
(d) pour tout $B \subsetneqq A$ dans $\mathcal{A}$, $\operatorname{Ker} h_{BA} = \operatorname{Ker} g_B$.

Pour $A = \{a\}$ ($a \in G^+$), posons $G_A = \mathbb{Z}$ et définissons $g_A \colon \mathbb{Z} \to G,\ n \mapsto na$. Alors (a), (b), (c) et (d) sont triviaux.

Supposons maintenant que A possède au moins deux éléments, et posons alors

$$H^A = \bigoplus_{B \subsetneq A \text{ dans } \mathcal{A}} G_B,$$

qui est trivialement un groupe simplicial; pour tout $B \subsetneq A$ dans $\mathcal{A}$, soit $q_{BA} \colon G_B \to H^A$ le plongement canonique. L'application "somme" des g_B est alors un homomorphisme de groupes ordonnés $g^A \colon H^A \to G$ tel que pour tout $B \subsetneq A$ dans $\mathcal{A}$,

$$g^A \circ q_{BA} = g_B.$$

Nous sommes alors dans la situation du Lemme 9.20 précédent, avec ce $g^A \colon H^A \to G$...! Ainsi, il existe un groupe simplicial G_A et deux homomorphismes de groupes ordonnés $\varphi_A \colon H^A \to G_A$ et $g_A \colon G_A \to G$ tels que

$$g_A \circ \varphi_A = g^A \text{ et } \operatorname{Ker} g^A = \operatorname{Ker} \varphi_A.$$

De plus, définissons alors, pour tout $B \subsetneq A$ dans $\mathcal{A}$,

$$h_{BA} = \varphi_A \circ q_{BA}$$

(qui est donc un homomorphisme de groupes ordonnés de G_B vers G_A). Montrons alors les points de (a) à (d):

(a) Soit $a \in A$. Puisque A possède au moins deux éléments, il existe $B \subsetneq A$ tel que $a \in B$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc $x \in G_B^+$ tel que $g_B(x) = a$. Par suite, $a = g_B(x) = g^A \circ q_{BA}(x) = g_A \circ \varphi_A \circ q_{BA}(x)$, donc $a \in g_A[G_A^+]$.

(b) Soit $B \subsetneq A$ dans $\mathcal{A}$, montrons que $g_A \circ h_{BA} = g_B$. C'est un calcul immédiat:

$$g_A \circ h_{BA} = g_A \circ \varphi_A \circ q_{BA} = g^A \circ q_{BA} = g_B.$$

(c) Soient C et B dans $\mathcal{A}$ avec $C \subsetneq B \subsetneq A$. Montrons que $h_{CA} = h_{BA} \circ h_{CB}$. Mais $h_{CA} = \varphi_A \circ q_{CA}$ et $h_{BA} \circ h_{CB} = \varphi_A \circ q_{BA} \circ h_{CB}$, et $\operatorname{Ker} \varphi_A = \operatorname{Ker} g^A$ par construction, il suffit donc de montrer (en utilisant l'argument $\varphi_A(x) = \varphi_A(y) \Leftrightarrow g^A(x) = g^A(y)$) que $g^A \circ q_{CA} = g^A \circ q_{BA} \circ h_{CB}$. Mais le membre de droite est égal à $g_B \circ h_{CB}$, donc, par hypothèse de récurrence, à g_C, alors que le membre de gauche est égal, par définition de g^A, à g_C; par suite, les deux membres sont égaux.

(d) Soit $B \subsetneq A$ dans $\mathcal{A}$, montrons que $\operatorname{Ker} h_{BA} = \operatorname{Ker} g_B$. D'une part, par le (b), $g_B = g_A \circ h_{BA}$, d'où l'inclusion $\operatorname{Ker} h_{BA} \subseteq \operatorname{Ker} g_B$. Réciproquement, puisque $g_B = g^A \circ q_{BA}$,

$$q_{BA}[\operatorname{Ker} g_B] \subseteq \operatorname{Ker} g^A = \operatorname{Ker} \varphi_A,$$

d'où $\operatorname{Ker} g_B \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi_A \circ q_{BA}) = \operatorname{Ker} h_{BA}$. Finalement, on obtient $\operatorname{Ker} g_B = \operatorname{Ker} h_{BA}$.

Par suite, l'hypothèse de récurrence est bien maintenue et (en complétant la construction par $h_{AA} = \mathrm{id}_{G_A}$) la construction est achevée. Il reste à vérifier que

$$(G, (g_A)_{A \in \mathcal{A}}) = \varinjlim((G_A)_{A \in \mathcal{A}}, (h_{BA})_{B \subseteq A \text{ dans } \mathcal{A}}).$$

Pour cela, utilisons la caractérisation de la Proposition 9.11. Pour tout $a \in G^+$, g_A est un homomorphisme de groupes ordonnés et $a \in g_A[G_A^+]$, d'où

$$G^+ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} g_A[G_A^+],$$

d'où du même coup

$$G = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} g_A[G_A]$$

puisque G est dirigé. Il reste à vérifier (c). Soit donc $A \in \mathcal{A}$. Puisque $g_A = g_B \circ h_{AB}$ pour tout $B \supseteq A$ dans $\mathcal{A}$, il vient

$$\bigcup_{B \supseteq A} \operatorname{Ker} h_{AB} \subseteq \operatorname{Ker} g_A.$$

Réciproquement, pour tout $B \supsetneq A$ dans $\mathcal{A}$, $\operatorname{Ker} h_{AB} = \operatorname{Ker} g_A$ par le (d) ci-dessus, d'où l'égalité

$$\bigcup_{B \supseteq A} \operatorname{Ker} h_{AB} = \operatorname{Ker} g_A,$$

ce qui achève la démonstration. □

À cause du caractère non constructif du Lemme 9.19, la preuve ci-dessus dépend de l'axiome du choix. Mais dans le cas où G est dénombrable, ou, plus généralement, bien ordonnable, ou encore si G est un groupe réticulé, alors l'on peut rendre la preuve du Lemme 9.19 constructive, donc aussi celle du Théorème 9.21.

Pour conclure, un principe de transfert de $\mathbb{Z}$ aux groupes de dimension. D'abord, une notion de base en théorie des modèles:

Définition. Une *formule atomique* [du langage $(+, \leq)$] est une formule du type

$$\sum_{i<n} p_i \mathbf{x}_i = 0$$

ou bien

$$\sum_{i<n} p_i \mathbf{x}_i \geq 0,$$

où n est un entier naturel et les p_i $(i < n)$ sont des entiers relatifs. Les $\mathbf{x}_i$ sont alors les *variables* de la formule.

Bien que la notion de "formule atomique" soit suffisamment universelle (elle désigne la même chose dans la plupart des références), les notions suivantes de formule *linéaire* ou *spéciale* ne le sont pas:

Définition. Une *formule linéaire* est une conjonction finie de formules atomiques. Une *formule spéciale* est un énoncé de la forme

$$(\forall \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)\big(\varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \Rightarrow (\exists \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\big)$$

où φ et ψ sont des formules linéaires.

Par exemple, les énoncés exprimant la non m-perforation (m fixé), ou bien la propriété d'interpolation finie, ou bien le fait d'être dirigé, sont des formules spéciales (exercice facile!). Une traduction facile du Corollaire 9.18 donne alors le Lemme suivant (*voir* [**Wehr10**, Proposition 2.2]):

LEMME 9.22. *Soit $\varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ une formule linéaire. Alors il existe, et ceci de façon calculable, un entier strictement positif l_φ et l_φ "vecteurs" $\vec{m}_j \in \{0, 1, \ldots, l_\varphi\}^n$ $(1 \leq j \leq l_\varphi)$ tels que pour tout groupe de dimension G, G^+ satisfait l'énoncé suivant (où l'on pose $\vec{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$):*

$$(\forall \vec{\mathbf{x}}) \left[\varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \Leftrightarrow (\exists \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{l_\varphi}) \left(\vec{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{l_\varphi} \vec{m}_j \mathbf{y}_j \right) \right].$$

PREUVE. Dans un premier temps, on transforme $\varphi(\vec{\mathbf{x}})$ en un système linéaire au sens précédent, en notant que $x \leq y$ si et seulement si il existe $z \geq 0$ tel que $x + z = y$. Puis on applique le Corollaire 9.18 au système linéaire ainsi obtenu—les $\vec{m}_j$ sont les vecteurs colonnes du paramétrage ainsi obtenu. □

Notons que dans le Lemme ci-dessus, $\mathbb{N}$ satisfait $\varphi(\vec{m}_j)$ (il suffit pour le voir de prendre $G = \mathbb{Z}$).

On en déduit alors immédiatement le résultat suivant [**Wehr10**, Corollary 2.3]:

PROPOSITION 9.23. *Soit θ une formule spéciale*

$$(\forall \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)\big(\varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \Rightarrow (\exists \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\big).$$

Soit N_φ le plus grand des coefficients (entiers naturels) de tous les $\vec{m}_j$ $(1 \leq j \leq l_\varphi)$ associés à φ par le Lemme 9.22. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) *Pour tout groupe de dimension G, G^+ satisfait θ;*
(ii) *$\mathbb{N}$ satisfait θ;*
(iii) *Pour tous x_i $(1 \leq i \leq m)$ dans $\{0, \ldots, N_\varphi\}$ tels que $\mathbb{N}$ satisfait $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{N}$ tels que $\mathbb{N}$ satisfait $\psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$.*

Le point (iii) signifie donc que pour vérifier que $\mathbb{N}$ satisfait θ, il suffit de se restreindre aux m-uplets d'entiers naturels inférieurs ou égaux à N_φ (et en fait, comme on le verra, aux $\vec{m}_j$).

PREUVE. (i)⇒(ii) et (ii)⇒(iii) sont triviaux. Supposons maintenant que (iii) soit vrai. Soit G un groupe de dimension et soient $x_1, \ldots, x_m$ dans G^+ tels que G^+ satisfait $\varphi(\vec{x})$ où $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Par le Lemme 9.22, il existe des éléments $y_1, \ldots, y_n$ de G^+ tels que

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{l_\varphi} \vec{m}_j y_j.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, l_\varphi\}$, puisque $\mathbb{N}$ satisfait $\varphi(\vec{m}_j)$, il existe par hypothèse $\vec{n}_j \in \mathbb{N}^n$ tel que $\mathbb{N}$ satisfait $\psi(\vec{m}_j, \vec{n}_j)$.

Puisque l'ensemble des éléments de $(G^+)^n$ satisfaisant ψ est évidemment un sous-monoïde de $(G^+)^n$, il suffit donc de vérifier que pour tout j, G^+ satisfait $\psi(\vec{m}_j y_j, \vec{n}_j y_j)$, ce qui est vrai puisque $\mathbb{N}$ satisfait $\psi(\vec{m}_j, \vec{n}_j)$. On en déduit immédiatement (i). □

De façon pratique, on en déduit *qu'il existe un algorithme pour décider si une formule spéciale donnée est satisfaite par tous les cônes positifs de groupes de dimension*: il suffit en effet de vérifier si oui ou non cette formule spéciale est satisfaite par $\mathbb{N}$, et il suffit même de le décider pour les vecteurs $\vec{m}_j$ obtenus par paramétrage des solutions de φ (générateurs du monoïde des solutions de φ dans $\mathbb{N}^m$). On est donc amené à décider si oui ou non un système linéaire donné admet une solution

dans $\mathbb{N}$, ce qui peut se faire en utilisant de nouveau le Lemme 9.22—*voir* l'Exercice 9.25 pour un exemple.

Signalons finalement d'autres points de la littérature où l'on peut trouver des analogues du Théorème d'Effros, Handelman, et Shen. Un premier point est, comme déjà signalé, le Théorème de Grillet [**Gril**] où une forme essentiellement équivalente (et d'ailleurs de quelques années plus ancienne) est montrée, dans le contexte des semi-groupes commutatifs. Un autre résultat beaucoup plus difficile, dont la preuve est d'une extrême complexité, (et qui est encore plus ancien!) est le *Théorème de décomposition de Bradford* [**Brad**], qui est un résultat de "paramétrage", analogue au Corollaire 9.18, de systèmes linéaires dans lesquels les "scalaires" sont des éléments de $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ au lieu d'être simplement des entiers naturels. La structure correspondante n'est plus celle de cône positif de groupe de dimension, mais c'est celle d'"algèbre cardinale", une structure introduite dans [**Tars2**] (mais aucune des preuves des résultats présentés dans cette référence n'atteint, et de très loin, la complexité de celle du résultat de Bradford).

Exercices du Chapitre 9

Exercice 9.1. Montrer qu'un groupe abélien préordonné satisfait la propriété d'interpolation finie si et seulement si son cône positif satisfait la propriété d'interpolation finie, si et seulement si son cône positif satisfait la *propriété de décomposition de Riesz* suivante:

$$(\forall x, y, z)\big(z \leq x + y \Rightarrow (\exists x' \leq x)(\exists y' \leq y)(z = x' + y')\big).$$

Exercice 9.2. * On dit qu'un ensemble ordonné $(P, \leq)$ satisfait la *propriété d'interpolation stricte finie* quand $(P, <)$ satisfait la propriété d'interpolation finie, *i.e.*, pour tous a_0, a_1, b_0, et b_1 dans P tels que

$$\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} < \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix},$$

il existe $x \in P$ tel que

$$\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} < x < \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}.$$

Soient G et H deux groupes abéliens ordonnés. Montrer que $G \times_{\text{lex}} H$ est un groupe d'interpolation si et seulement si G et H sont des groupes d'interpolation et soit G satisfait la propriété d'interpolation stricte finie, soit H est dirigé.

Exercice 9.3. Montrer que $\mathbb{Q}$ satisfait la propriété d'interpolation stricte finie (*voir* l'Exercice 9.2 pour la définition), mais que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ne satisfait pas cette propriété.

Exercice 9.4. * Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On considère le groupe $D^1(U)$ des applications *dérivables* de U vers $\mathbb{R}$, muni du cône positif

$$D^1(U)^+ = \{f \in D^1(U) \mid (\forall x \in U)(f(x) \geq 0)\}.$$

(a) Montrer que $D^1(U)$ est non perforé.
(b) * (cette question nécessite quelques connaissances supplémentaires de topologie et d'analyse réelle) Montrer que toute application continue de U vers $\mathbb{R}$ est majorée par une application dérivable (et même de classe C^∞) de U vers $\mathbb{R}$. En déduire que $D^1(U)$ est dirigé.

(c) Montrer que pour tout élément f de $D^1(U)^+$ et tout $a \in U$, $f(a) = 0$ implique que $f'(a) = 0$ (faire un dessin!).
(d) Soient f_0, f_1, g_0, et g_1 dans $D^1(U)^+$ telles que $f_0 + f_1 = g_0 + g_1$. Montrer que pour tous $i, j < 2$, l'application h_{ij} de U vers $\mathbb{R}$ définie par

$$h_{ij} \colon x \mapsto \begin{cases} \frac{f_i(x)g_j(x)}{f_0(x)+f_1(x)} & \text{si } f_0(x) + f_1(x) > 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appartient à $D^1(U)$.
(e) En déduire que $D^1(U)$ est un groupe de dimension.
(f) Montrer que $D^1(U)$ n'est pas un groupe réticulé.

Exercice 9.5. Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, muni du cône positif

$$G^+ = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++})$$

(on rappelle que pour tout groupe totalement ordonné H, $H^{++} = H^+ \setminus \{0\}$). Montrer que G est un groupe de dimension non réticulé.

Exercice 9.6. Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, muni du cône positif

$$G^+ = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 < y < 2x\}.$$

Montrer que G est un groupe de dimension non réticulé.

Exercice 9.7. Soit G un groupe abélien ordonné. Un *idéal* de G, est par définition, un sous-groupe convexe dirigé de G.
(a) Montrer que si G est un groupe d'interpolation et I est un idéal de G, alors I et G/I sont des groupes d'interpolation.
(b) Soit $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, muni du cône positif

$$G^+ = (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})).$$

Puis soit $I = \mathbb{Z} \times \{0\}$. Montrer que I est un idéal de G, que I est G/I sont des groupes d'interpolation mais que G n'est pas un groupe d'interpolation (***Indication:*** noter que $\begin{matrix}(0,0)\\(0,1)\end{matrix} \leq \begin{matrix}(1,1)\\(1,2)\end{matrix}$).

Exercice 9.8. Montrer que si I, J, et K sont trois idéaux d'un groupe d'interpolation G, alors

$$I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K),$$
$$I + (J \cap K) = (I + J) \cap (I + K).$$

Exercice 9.9. Soit $G = \mathbb{R}^3$, muni du cône positif

$$G^+ = \{(0,0,0)\} \cup \{(x,y,0) \in G \mid x > 0 \text{ et } y > 0\} \cup \{(x,y,z) \in G \mid x+y > 0 \text{ et } z > 0\}.$$

Soit $I = \{(x,y,z) \in G \mid z = 0\}$. Montrer que I est un idéal de G, que I et G/I sont des groupes de dimension mais que G n'est pas un groupe d'interpolation (***Indication:*** noter que $\begin{matrix}(0,0,0)\\(1,-1,0)\end{matrix} \leq \begin{matrix}(2,1,0)\\(1,0,1)\end{matrix}$).

Exercice 9.10. Soit G un sous-groupe ordonné de $(\mathbb{R}, +, \leq)$ de rang au moins égal à 2, *i.e.*, il existe deux éléments (que l'on peut supposer sans perte de généralité strictement positifs) a et b de G qui sont linéairement indépendants au-dessus de $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il n'existe pas de famille $(G_i)_{i \in I}$ de sous-groupes de G telle que:

(i) I est un ensemble ordonné *dirigé*, *i.e.*, toute paire d'éléments de I est majorée.
(ii) Tous les groupes ordonnés G_i sont simpliciaux.
(iii) Pour tous $i \leq j$ dans I, $G_i \subseteq G_j$.
(iv) $\bigcup_{i\in I} G_i = G$.

(***Indication:*** montrer qu'il existe $i \in I$ tel que $\{a, b\} \subseteq G_i$. Montrer que le rang de G_i est ≥ 2, puis qu'il existe deux éléments incomparables dans G_i).

Exercice 9.11. Montrer que le groupe $(\mathbb{R}, +)$ ne se plonge pas dans une puissance (nécessairement infinie) de $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 9.12. Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. Définir *la* limite directe d'un système de modèles de la même façon que l'on construit la limite directe d'un système de groupes préordonnés dans la preuve du Lemme 9.10 (il s'agit de définir de nouvelles constantes, opérations et relations sur $\bigcup_{i\in I}\{i\} \times M_i/\sim$). Soit

$$(M, (f_i)_{i\in I}) = \varinjlim((M_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j \text{ dans } I})$$

où les M_i sont des modèles de $\mathcal{L}$ et où les f_{ij} sont des homomorphismes de modèles de $\mathcal{L}$. Si P est une propriété dépendant de la variable i, on notera "$(\forall^\infty i)P(i)$" pour $(\exists j \in I)(\forall i \geq j)P(i)$.

(a) Soit $\varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ une formule sans quantificateurs *positive* (*i.e.*, construite à partir des formules atomiques avec les connecteurs et et ou, mais sans le connecteur non), soit $i \in I$, soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de M_i. Montrer que

$$M \models \varphi(f_i(a_1), \ldots, f_i(a_n)) \iff (\forall^\infty j)\big(M_j \models \varphi(f_{ij}(a_1), \ldots, f_{ij}(a_n))\big).$$

(b) Soit θ un énoncé de $\mathcal{L}$ qui est une *conjonction* d'énoncés de la forme

$$(\forall \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)\Big(\varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \Rightarrow (\exists \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)\Big)$$

où φ et ψ sont des formules positives sans quantificateurs de $\mathcal{L}$. Montrer que si tous les M_i satisfont θ, alors M satisfait θ. Retrouver (instantanément!) les Corollaires 9.14 à 9.16.

(c) On suppose que tous les f_i sont des plongements (au sens de la théorie des modèles). Montrer que pour tout énoncé θ de $\mathcal{L}$ de la forme $\forall\exists$, si tous les M_i satisfont θ, alors M satisfait θ.

Exercice 9.13. Paramétrer dans la classe des groupes de dimension l'équation $3\mathbf{x} + \mathbf{y} = 3\mathbf{x}' + \mathbf{y}'$.

Exercice 9.14. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, un paramétrage de l'équation $\mathbf{x} + \mathbf{y} = m\mathbf{z}$ dans la classe des groupes de dimension est le suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{x} &= \sum_{0\leq k\leq m} k\mathbf{t}_k \\ \mathbf{y} &= \sum_{0\leq k\leq m} (m-k)\mathbf{t}_k \\ \mathbf{z} &= \sum_{0\leq k\leq m} \mathbf{t}_k. \end{cases}$$

(*Note:* c'est aussi vrai pour les groupes d'interpolation, mais il faut alors un peu plus d'efforts. Essayez!)

Exercice 9.15. On appelle un *espace vectoriel de dimension* un espace vectoriel ordonné sur $\mathbb{R}$, dirigé et satisfaisant la propriété d'interpolation finie. Montrer que tout espace vectoriel de dimension est limite directe d'espaces vectoriels ordonnés isomorphes à des $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. (***Indication:*** montrer d'abord que tout espace vectoriel de dimension est un groupe de dimension; appliquer le théorème d'Effros,

Handelman, et Shen, et prolonger les homomorphismes $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ en homomorphismes $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \dots$).

Exercice 9.16. Soit k un entier naturel. Pour toute partie X de $\mathbb{N}^k$, un *vecteur minimal* de X est, par définition, un élément minimal de $(X, \leq)$, *i.e.*, un élément a de X tel que

$$(\forall x \in X)(x \leq a \Longrightarrow x = a).$$

Montrer que pour toute partie X de $\mathbb{N}^k$, l'ensemble des vecteurs minimaux de X est *fini*. (***Indication:*** considérer l'anneau de polynômes à k indéterminées $R = \mathbb{Z}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$. On rappelle que par le théorème de la base de Hilbert, R est un anneau *noethérien*; appliquer ceci à l'idéal de R engendré par les monômes $\mathbf{x}_1^{n_1} \cdot \mathbf{x}_2^{n_2} \cdots \mathbf{x}_k^{n_k}$ où $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in X$).

Exercice 9.17. Montrer que pour tout entier naturel k et pour tout sous-groupe G de $(\mathbb{Z}^k, +, 0)$, $G \cap \mathbb{N}^k$ est un monoïde finiment engendré (on pourra utiliser l'Exercice 9.16).

Exercice 9.18.

(a) Montrer que tout sous-monoïde de $(\mathbb{N}, +, 0)$ est finiment engendré.
(b) Trouver un sous-monoïde non finiment engendré de $(\mathbb{N}^2, +, (0, 0))$.

Exercice 9.19. Soit Σ un système linéaire. Montrer que tout paramétrage de Σ dans $\mathbb{Z}$ est un paramétrage de Σ dans la classe des groupes de dimension.

Cela signifie donc que pour avoir l'expression de la solution générale d'un système linéaire dans tous les groupes de dimension, il suffit de l'avoir dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 9.20. Montrer que tout groupe de dimension *dénombrable* est limite directe d'une *suite* de groupes simpliciaux (*i.e.*, l'ensemble d'indices du système direct utilisé est $\mathbb{N}$ muni de son ordre naturel).

Exercice 9.21.

(a) Soit m un entier naturel non nul. Montrer que pour tout groupe de dimension G et tout $a \in G$, l'ensemble des éléments x de G tels que $mx \leq a$ est dirigé (*i.e.*, si $mx \leq a$ et $my \leq a$, alors il existe z tel que $\dfrac{x}{y} \leq z$ et $mz \leq a$). (***Indication:*** on pourra soit raisonner directement par récurrence sur m, de façon similaire à la preuve du Lemme 8.16, soit utiliser le théorème d'Effros, Handelman, et Shen, soit encore utiliser la Proposition 9.23).
(b) Montrer que pour tout entier naturel non nul m, l'équation $m\mathbf{x} + \mathbf{y} = m\mathbf{x}' + \mathbf{y}'$ admet pour paramétrage dans la classe des groupes de dimension le système suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{x} &= \mathbf{u} + \mathbf{v}, \\ \mathbf{y} &= m\mathbf{w} + \mathbf{z}, \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{u} + \mathbf{w}, \\ \mathbf{y}' &= m\mathbf{v} + \mathbf{z}. \end{cases}$$

(*voir* aussi l'Exercice 9.13). Essayer de résoudre cette question sans admettre au préalable le théorème d'Effros, Handelman, et Shen! On aura ainsi montré que le théorème de représentation de Grillet par les limites directes de puissances finies de $\mathbb{N}$ entraîne [assez facilement] celui d'Effros, Handelman, et Shen.

Exercice 9.22. * Soit $\varphi(\mathbf{x}, \vec{\mathbf{y}}, \vec{\mathbf{a}})$ une formule linéaire (où $\vec{\mathbf{y}}$ a m variables et $\vec{\mathbf{a}}$ a n variables). Soit G un groupe de dimension et soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de G. Montrer que l'ensemble X suivant:

$$X = \{x \in G \mid (\exists \vec{y} \in G^m)\varphi(x, \vec{y}, \vec{a})\}$$

est dirigé.

Exercice 9.23. Soit G un groupe abélien ordonné. Un élément u de G^+ est une *unité forte* de G quand pour tout $g \in G$, il existe un entier naturel n tel que $g \leq nu$; G est *simple* quand tout élément de $G^+ \setminus \{0\}$ est une unité forte de G.

On définit une relation binaire $\leqslant\!\!\!\leqslant$ sur G en posant, pour tous x et y dans G,

$$x \leqslant\!\!\!\leqslant y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } y - x \text{ est une unité forte de } G).$$

(a) Montrer que $\leqslant\!\!\!\leqslant$ est une relation d'ordre compatible avec la structure de groupe et que $(G, +, 0, \leqslant\!\!\!\leqslant)$ est un groupe abélien ordonné simple.
(b) Soit X un espace topologique compact et soit $G = \mathbf{C}(X)$. Si f et g sont deux éléments de G, quand a-t-on $f \leqslant\!\!\!\leqslant g$?
(c) Soit X un espace topologique compact. Montrer que $(\mathbf{C}(X), +, 0, \leqslant\!\!\!\leqslant)$ est un groupe de dimension simple.
(d) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, (0, 0), \leqslant\!\!\!\leqslant)$ est-il un groupe d'interpolation?

Exercice 9.24. ** Montrer qu'il existe un sous-monoïde A de $\mathbb{Q}^+$ satisfaisant les conditions suivantes:

(a) $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subseteq A$;
(b) $1 \notin A$;
(c) A satisfait la propriété de raffinement.

Montrer qu'alors, $A + (-A)$ muni du cône positif A est un groupe de Riesz *simple* (*voir* l'Exercice 9.23), sans torsion mais 2-perforé. (***Indication:*** noter que pour tous x et y dans $A \setminus \{0\}$, il existe m et n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $mx = ny$).

Exercice 9.25.

(a) Soit E un groupe abélien totalement ordonné, soit n un entier naturel et soit $f\colon \mathbb{Z}^n \to E$ un ℓ-homomorphisme non nul. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un ℓ-idéal premier de $\mathbb{Z}^n$. En déduire qu'il existe $k < n$ et un ℓ-homomorphisme $g\colon \mathbb{Z} \to E$ tel que pour tout $(x_i)_{i<n}$ dans $\mathbb{Z}^n$,

$$f\big((x_i)_{i<n}\big) = g(x_k).$$

(b) * En déduire qu'un groupe abélien totalement ordonné est limite directe *par des ℓ-homomorphismes* d'une famille de groupes simpliciaux si et seulement si il est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +, 0, \leq)$. (***Indication:*** si E est limite directe par des ℓ-homomorphismes d'une famille de groupes simpliciaux, montrer que pour tous éléments x et y de E, il existe $(m, n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $mx = ny$).
(c) En déduire que $\mathbb{Z} \times_{\text{lex}} \mathbb{Z}$ n'est pas limite directe *par des ℓ-homomorphismes* de groupes simpliciaux.

Exercice 9.26. Quelles sont les solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + 4\mathbf{z} = 9$? (une possibilité est de paramétrer l'équation $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + 4\mathbf{z} = \mathbf{t}$).

Exercice 9.27. On dit qu'un groupe ordonné G est *faiblement archimédien* quand pour tous éléments a et b de G^+, si pour tout entier naturel n, on a $na \leq b$, alors $a = 0$.

(a) Montrer que tout groupe réticulé faiblement archimédien est archimédien.
(b) Montrer que $\mathbb{Z} \times_{\text{lex}} \mathbb{Z}$ n'est pas faiblement archimédien.
(c) * Trouver un exemple de groupe abélien ordonné faiblement archimédien non archimédien.

Exercice 9.28. * Soit G un groupe abélien ordonné et soit u une *unité forte* de G (*voir* l'Exercice 9.23). Un *état* de (G, u) est, par définition, un homomorphisme de groupes ordonnés $s\colon G \to \mathbb{R}$ tel que $s(u) = 1$.

(a) Soit H un sous-groupe de G tel que $u \in H$, soit $a \in G$ et soit s un état sur H. Montrer que s se prolonge en un état sur $H + \mathbb{Z}a$ (on pourra montrer que les valeurs possibles du candidat pour être "$s(a)$" se trouvent dans un *intervalle* non vide de $\mathbb{R}$, comme dans la preuve du théorème de Hahn-Banach).
(b) En déduire que (G, u) admet au moins un état.

Exercice 9.29. * Cet exercice nécessite les connaissances de base sur le *produit tensoriel* (de $\mathbb{Z}$-modules). Soient A et B deux groupes abéliens préordonnés. On munit le produit tensoriel $A \otimes B$ de A et B (considérés comme $\mathbb{Z}$-modules) du sous-ensemble $(A \otimes B)^+$ de toutes les sommes finies $\sum_{i<n} a_i \otimes b_i$ où pour tout i, $(a_i, b_i) \in A^+ \times B^+$.

(a) Montrer que $(A \otimes B)^+$ est le cône positif d'une structure de groupe préordonné sur $A \otimes B$.

Nous nous référerons désormais à $A \otimes B$ muni de ce cône positif comme le *produit tensoriel des groupes préordonnés A et B*, et nous le noterons encore $A \otimes B$. On peut montrer sans difficulté que ce "produit tensoriel" satisfait les propriétés universelles naturelles que devrait satisfaire un produit tensoriel, mais ce ne sera pas notre propos.

(b) Montrer que si A et B sont des groupes ordonnés, alors $A \otimes B$ est un groupe ordonné (***Indication:*** on pourra utiliser l'Exercice 9.28).
(c) Montrer que le produit tensoriel "préserve les limites directes", *i.e.*, que si

$$((A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j \text{ dans } I})$$

est un système direct de groupes abéliens préordonnés et si G est un groupe abélien préordonné, alors, avec des homomorphismes que l'on précisera,

$$\varinjlim_{i \in I} (G \otimes A_i) \cong G \otimes \varinjlim_{i \in I} A_i.$$

(d) Montrer que le produit tensoriel de deux groupes de dimension est un groupe de dimension (***Indication:*** on pourra commencer par le cas de deux groupes simpliciaux, puis utiliser le théorème d'Effros, Handelman, et Shen et la question précédente).

Voir [**GoHa2**] pour ceci et plus de détails. Il est à noter que le produit tensoriel de deux groupes d'interpolation n'est pas nécessairement un groupe d'interpolation (*voir* [**Wehr14**]).

Exercice 9.30. * Montrer que $G = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ (*voir* l'Exercice 9.29) est faiblement archimédien (*voir* l'Exercice 9.27 pour la définition) mais non archimédien (par suite, par l'Exercice 9.27(a), il n'est pas réticulé). ***Indication:*** pour montrer que G est faiblement archimédien, considérer l'homomorphisme de groupes $\phi\colon G \to \mathbb{R}$ défini par $\phi(x \otimes y) = x \cdot y$, et montrer que $\operatorname{Ker} \phi \cap G^+ = \{0\}$. Pour montrer que G n'est pas archimédien, on pourra commencer par montrer que pour $\alpha = \sqrt{2}$ (tout

nombre irrationnel conviendrait) et tout entier relatif n, $n(\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha) \leq 1 \otimes 1$. *Voir* [**Wehr14**] pour plus de détails.

CHAPITRE 10

Monoïdes commutatifs positivement préordonnés et leur dualité

Comme la tendance en a été amorcée depuis le début, notre progression s'est faite depuis les objets les plus structurés—les algèbres de Boole, élucidées par le Théorème de représentation de Stone, jusqu'aux objets les moins structurés—les groupes de dimension, très partiellement classifiés par le Théorème d'Effros, Handelman, et Shen, en passant par les groupes réticulés, plus structurés (*valeurs* des éléments, Théorème de Lorenzen, polaires...) mais pour lesquels il n'existe cependant pas à ce jour d'analogue du Théorème d'Effros, Handelman, et Shen (*voir* à ce sujet l'Exercice 9.24). Nous allons à présent voir les objets les moins structurés de tous, mais qui sont cependant présents dans tous les chapitres précédents. Ce sont évidemment les monoïdes ordonnés, mais nous allons en fait considérer une classe assez spéciale de monoïdes ordonnés. Leur motivation remonte probablement à [**Tars1**, **Tars2**], et des motivations qui ne sont pas étrangères à celles-ci se retrouvent dans [**Wehr1**]; une étude "algébrique" systématique est entreprise dans [**Wehr2**, **Wehr3**]. Dans ces deux dernières références, ces monoïdes ordonnés sont baptisés du terme peu inspiré mais commode de P.O.M.'s ("positively ordered monoids"). Le terme que nous allons utiliser ici est également peu inspiré (peut-être le besoin d'un peu plus d'inspiration dans ce domaine se fera-t-elle sentir lorsque la généralisation ultime de ces "P.O.M.'s" se sera manifestée?), mais peut-être un peu plus descriptif:

Définition. Un po$^+$-*monoïde* est une structure $(A, +, 0, \leq)$ satisfaisant les conditions suivantes:

(a) $(A, +, 0, \leq)$ est un monoïde commutatif préordonné, c'est-à-dire un monoïde commutatif $(A, +, 0)$, muni d'une relation d'ordre (partiel) $\leq$ telle que $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$, pour tous x, y, $z \in A$.

(b) Tout élément de A est positif pour $\leq$, *i.e.*, $0 \leq x$, pour tout $x \in A$.

De plus, A est *antisymétrique* lorsque la relation de préordre $\leq$ est antisymétrique (*i.e.*, quand $\leq$ est une relation d'ordre), *algébrique* quand $\leq$ est défini par l'énoncé

$$(\forall x, y)\big(x \leq y \Longleftrightarrow (\exists z)(x + z = y)\big),$$

conique quand il satisfait

$$(\forall x, y)(x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0).$$

Dans [**Wehr2**] et les articles suivants, le terme "minimal" est utilisé plutôt qu'"algébrique", car pour tout monoïde commutatif A, le préordre algébrique $\leq_{\text{alg}}$ sur A est le plus petit (pour l'inclusion) qui structure A en un *po*$^+$-monoïde. Il est à noter cependant que $\leq_{\text{alg}}$ n'est pas nécessairement antisymétrique—par exemple, quand A est un groupe abélien, $\leq_{\text{alg}}$ est le préordre *grossier* sur A.

Notons aussi en général que si A est un monoïde commutatif, l'ordre *trivial* sur A (*i.e.*, la relation d'*égalité* sur A) n'est *pas* (sauf cas trivial!) un préordre de po^+-monoïde sur A. Ceci illustre une fois de plus le fait que ***(grossier)≠(trivial)***.

Étrangement (?), il s'avérera également que l'algébricité d'un po^+-monoïde s'apparentera parfois formellement à une condition *duale* de l'antisymétrie. *Voir* par exemple l'Exercice 10.1.

Exemple 10.1. On pose désormais $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, muni de sa structure naturelle de monoïde commutatif (avec pour tout x, $\infty + x = x + \infty = \infty$). Alors le préordre algébrique sur $\overline{\mathbb{N}}$ est antisymétrique, de plus grand élément ∞. Un autre préordre de po^+-monoïde sur $\overline{\mathbb{N}}$ est celui défini par

$$x \leq y \Leftrightarrow \infty x \leq \infty y;$$

il est conique mais pas antisymétrique.

Exemple 10.2. Munissons $A = \mathbb{N} \times \overline{\mathbb{N}}$ de la relation d'ordre "lexicographique" définie par

$$(m, x) \leq (n, y) \Longleftrightarrow \big(m < n \text{ ou } (m = n \text{ et } x \leq y)\big).$$

On vérifie facilement que *dans ce cas particulier*, A est un po^+-monoïde (*voir* cependant l'Exercice 10.2), naturellement noté $\mathbb{N} \times_{\text{lex}} \overline{\mathbb{N}}$. Il est antisymétrique, mais pas algébrique (*voir* l'Exercice 10.1).

En raison de la généralité de la classe des po^+-monoïdes, il est hors de question de les classifier! Ils fournissent plutôt un *contexte* pratique dans lequel beaucoup de problèmes concernant les structures ordonnées peuvent être formulés. Une classe particulièrement importante de po^+-monoïdes est celle des po^+-monoïdes algébriques satisfaisant la propriété de raffinement. Nous allons donc leur donner un nom:

Définition. Un *monoïde de raffinement* est un monoïde commutatif satisfaisant la propriété de raffinement. Un po$^+$-*monoïde de raffinement* est un po^+-monoïde algébrique satisfaisant la propriété de raffinement.

De façon générale, les po^+-monoïdes de raffinement sont exactement les monoïdes de raffinement munis de leur préordre algébrique. Par exemple, $\mathbb{N}$ et $\overline{\mathbb{N}}$, munis de leur ordre algébrique, sont des po^+-monoïdes de raffinement. Par contre, bien que [le monoïde sous-jacent de] $\mathbb{N} \times_{\text{lex}} \overline{\mathbb{N}}$ satisfasse la propriété de raffinement, $\mathbb{N} \times_{\text{lex}} \overline{\mathbb{N}}$ n'est pas un po^+-monoïde de raffinement, car il n'est pas algébrique. Nous allons maintenant voir d'autres exemples; le suivant est si important que nous le formulerons comme définition—il joue le même rôle pour les po^+-monoïdes que $\{0, 1\}$ pour les algèbres de Boole ("pivot de dualité"):

Définition. La *droite réelle positive achevée* est le monoïde commutatif $\overline{\mathbb{R}}^+ = ([0, \infty], +, 0)$ muni de son préordre algébrique (qui est aussi un ordre).

Par suite, $\overline{\mathbb{N}}$ s'identifie à (et en fait, *est*) un sous-po^+-monoïde de $\overline{\mathbb{R}}^+$. Le cadre général pour ce genre d'identification est le suivant:

Définition. Soient A et B deux po^+-monoïdes et soit $f\colon A \to B$.

(i) f est un *homomorphisme de* po$^+$-*monoïdes*, quand f est un homomorphisme croissant de monoïdes ordonnés.

Notons, en particulier, que $x \leq y$ implique toujours que $f(x) \leq f(y)$, pour x, $y \in A$.

(ii) f est un *plongement de* po$^+$*-monoïdes*, quand f est un homomorphisme de *po*$^+$-monoïdes satisfaisant

$$f(x) \leq f(y) \Longrightarrow x \leq y,$$

pour tous x, $y \in A$.

Exemple 10.3. Munissons $\mathbb{N}$ et $\overline{\mathbb{N}}$ de leurs (pré)ordres algébriques et soit $f\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{N}},\ x \mapsto \infty x$. Alors f est un homomorphisme non injectif de *po*$^+$-monoïdes de raffinement, mais $f^{-1}[\{0\}] = \{0\}$.

Exemple 10.4. Soient $\leq_0$ l'ordre naturel et $\leq_1$ le préordre grossier sur $\mathbb{N}$. Alors l'identité sur $\mathbb{N}$ est un homomorphisme injectif de *po*$^+$-monoïdes de $(\mathbb{N}, +, 0, \leq_0)$ dans $(\mathbb{N}, +, 0, \leq_1)$, mais ce n'est pas un plongement de *po*$^+$-monoïdes.

Exemple 10.5. Soit G un groupe abélien préordonné. Alors $(G^+, +, 0, \leq)$ est un *po*$^+$-monoïde algébrique simplifiable. Il est antisymétrique si et seulement si G est un groupe ordonné. C'est un *po*$^+$-monoïde de raffinement si et seulement si G est un groupe d'interpolation (ceci résulte immédiatement de la Proposition 9.1).

Exemple 10.6. Soit $\leq_0$ l'ordre produit et soit $\leq_1$ l'ordre lexicographique sur $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Alors l'identité est un homomorphisme injectif de *po*$^+$-monoïdes (antisymétriques, simplifiables) de $(A, +, 0, \leq_0)$ dans $(A, +, 0, \leq_1)$, mais ce n'est pas un plongement de *po*$^+$-monoïdes.

Exemple 10.7. Soit $(A, +, \leq, 0)$ un *sup-demi-treillis avec* 0 (*voir* le Chapitre 2). Alors $(A, +, \leq, 0)$ est un *po*$^+$-monoïde algébrique antisymétrique. Il ne satisfait pas toujours la propriété de raffinement, même dans le cas des treillis (*voir* l'Exercice 5.5).

Exemple 10.8. Soit $(R, +, \cdot, 0, 1)$ un *anneau commutatif*. Alors on peut munir l'ensemble $\mathcal{I}(R)$ des *idéaux* de R de l'addition $+$ et de la relation d'ordre $\leq$ définis par

$$\begin{cases} I + J &= \text{idéal engendré par } \{x \cdot y \mid x \in I \text{ et } y \in J\}, \\ I \leq J &\Longleftrightarrow \quad I \supseteq J \end{cases}$$

(attention, $I + J$ est ici ce que l'on note plutôt habituellement $I \cdot J \ldots$!) Alors $+$ et $\leq$ munissent $\mathcal{I}(R)$ d'une structure de *po*$^+$-monoïde. Si R est un *anneau de Dedekind*, alors $\mathcal{I}(R)$ est isomorphe au cône positif $\mathbb{N}^P$ du groupe réticulé complet $\mathbb{Z}^P$ où P est l'ensemble des idéaux premiers de R; en particulier, dans ce dernier cas, $\mathcal{I}(R)$ est un *po*$^+$-monoïde de raffinement.

Bien que les exemples précédents nous fournissent plusieurs exemples de *po*$^+$-monoïdes de raffinement non simplifiables, une propriété étrange des *po*$^+$-monoïdes de raffinement est une version "approximative" de la simplifiabilité:

Proposition 10.9. *Soit n un entier naturel, soit A un* po$^+$*-monoïde de raffinement et soient a, b, et c des éléments de A.*

(a) *Si $a + c = b + c$, alors il existe des éléments d, u, et v de A tels que*

$$a = d + u \text{ et } b = d + v \text{ et } \begin{matrix} nu \\ nv \end{matrix} \leq c.$$

(b) *Si $a + c \leq b + c$, alors il existe $u \in A$ tel que $a \leq b + u$ et $nu \leq c$.*

PREUVE. (a) Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$, et $c_0 = c$. Notons que $a_0 + c_0 = b_0 + c_0$. Soit k un entier naturel et supposons avoir défini a_k, b_k, et c_k dans A tels que l'hypothèse de récurrence $a_k + c_k = b_k + c_k$ soit satisfaite. En utilisant la propriété de raffinement, on obtient une matrice de raffinement

	b_k	c_k
a_k	d_k	a_{k+1}
c_k	b_{k+1}	c_{k+1}

où d_k, a_{k+1}, b_{k+1}, et c_{k+1} sont des éléments de A. Par suite, $a_{k+1} + c_{k+1} = b_{k+1} + c_{k+1}$, l'hypothèse de récurrence est donc satisfaite au rang $k+1$. Un raisonnement facile par récurrence fournit alors $a = \left(\sum_{k<n} d_k\right) + a_n$, $b = \left(\sum_{k<n} d_k\right) + b_n$, et $c = \left(\sum_{k<n} a_{k+1}\right) + c_n = \left(\sum_{k<n} b_{k+1}\right) + c_n$. Puisque $a_k = d_k + a_{k+1}$ pour tout k, la suite des a_k est décroissante, donc $c \geq na_n + c_n \geq na_n$. De même, $c \geq nb_n$. Par suite, $d = \sum_{k<n} d_k$, $u = a_n$, et $v = b_n$ sont solutions de (a).

(b) Puisque le préordre sur A est algébrique, il existe $h \in A$ tel que $a + c + h = b + c$. D'après (a), il existe des éléments d, u, et v de A tels que

$$a + h = d + u, \qquad b = d + v, \text{ et } \begin{matrix} nu \\ nv \end{matrix} \leq c.$$

Par suite, $a \leq a + h = d + u \leq b + u$ avec $nu \leq c$. □

En remplaçant n par l'infini dans l'énoncé précédent et en attribuant à l'énoncé informel "$\infty a \leq b$" la signification $a + b = b$, nous obtenons les définitions suivantes:

DÉFINITION-NOTATION. *Dans tout monoïde commutatif, on pose*

$$x \ll y \Longleftrightarrow x + y = y$$

et on dit alors que y absorbe x.

DÉFINITION. Dans tout po^+-monoïde, la *propriété de pseudo-simplification* est l'énoncé

$$(\forall a, b, c)\big(a + c \leq b + c \Longrightarrow (\exists x \ll c)(a \leq b + x)\big).$$

Un po^+-monoïde est *pseudo-simplifiable* quand il satisfait la propriété de pseudo-simplification. Un po$^+$*-monoïde de raffinement fort* est un po^+-monoïde antisymétrique, de raffinement, et pseudo-simplifiable.

Les po^+-monoïdes de raffinement fort sont solutions d'un problème de prolongement simultané de deux mesures en théorie de la mesure abstraite, *voir* [**ShWe**].

EXEMPLE 10.10. Munissons l'ensemble $A = \{0, 1, 2\}$ de l'addition $\oplus$ définie par

$$x \oplus y = \min\{x + y, 2\}.$$

Alors l'ordre naturel sur A est également le préordre algébrique sur A. Bien que A soit *totalement ordonné*, il ne satisfait pas la propriété de raffinement (on ne peut pas trouver de matrice de raffinement pour $2 \oplus 1 = 1 \oplus 1$), ni la propriété de pseudo-simplification ($2 \oplus 1 = 1 \oplus 1$, mais aucun $x \ll 1$—seul 0 est candidat!—ne satisfait $2 \leq 1 \oplus x$).

Voir l'Exercice 10.4 pour un exemple simple de po^+-monoïde antisymétrique de raffinement non pseudo-simplifiable (malgré le résultat de la Proposition 10.9). Cet exemple prend une signification supplémentaire dans [**Wehr8**]. Un autre exemple s'obtient en montrant que tout po^+-monoïde algébrique se plonge dans un po^+-monoïde de raffinement (c'est un résultat de [**Wehr6**]) puis en appliquant ce résultat à l'exemple précédent, puis en observant que dans cet exemple, $a + b \leq 2b$ n'entraîne pas $a \leq b$ (par exemple pour $a = 2$ et $b = 1$), alors que dans tout po^+-monoïde de raffinement fort, $a + b \leq 2b$ entraîne $a \leq b$ (c'est d'ailleurs la question préliminaire de l'Exercice 10.4).

Exemple 10.11. $\overline{\mathbb{R}}^+$ est un po^+-monoïde de raffinement fort. En fait, si l'on définit, pour tout élément x de $\overline{\mathbb{R}}^+$, x/∞ comme égal à 0 si $x < \infty$ et à ∞ si $x = \infty$, alors on obtient que pour tous a, b, et c dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, $a + c \leq b + c$ entraîne $a \leq b + (c/\infty)$.

De la même manière, $\overline{\mathbb{N}}$ est un po^+-monoïde de raffinement fort. Une classe plus générale de po^+-monoïdes de raffinement fort est montrée dans les Exercices 10.13 et 10.14.

Nous renvoyons aux exercices pour d'autres propriétés des po^+-monoïdes de raffinement ou de raffinement fort, et il est temps d'aborder la dualité. Cette théorie présentera de nombreux traits communs avec la théorie des espaces vectoriels normés, où le "pivot de dualité" est $\mathbb{R}$ (les formes linéaires sont les homomorphismes vers $\mathbb{R}$), ou bien la théorie des algèbres de Boole, où le pivot de dualité est $\{0, 1\}$. Ici, le pivot de dualité sera $\overline{\mathbb{R}}^+$—on considérera donc les homomorphismes (de po^+-monoïdes) d'un po^+-monoïde A vers $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Notons que l'on ne considère pas que les homomorphismes de monoïdes, mais les homomorphismes de monoïdes *ordonnés* de A vers $\overline{\mathbb{R}}^+$—*voir* les Exercices 10.15 et 10.16 pour une illustration de ceci.

Définition-notation. *Pour tous $a \leq b$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, on définit $b - a$ comme le plus grand élément x de $\overline{\mathbb{R}}^+$ tel que $a + x \leq b$.*

Ainsi, $b - a$ est la différence usuelle de b et de a quand b est fini, alors que pour $b = \infty$, $b - a = \infty$ (en particulier, $\infty - \infty = \infty$).

Lemme 10.12. *Pour tous a, b, et c dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ tels que $c \leq b$,*

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Preuve. Pour $a = \infty$ il s'agit de montrer que $\infty + (b - c) = \infty - c$, ce qui est le cas (chaque membre est égal à ∞). Pour $b = \infty$ il s'agit de montrer que $a + \infty = \infty - c$, ce qui est aussi le cas (chaque membre est encore égal à ∞). Enfin, pour a et b finis, c est également fini et le résultat est trivial. □

Le résultat suivant est l'analogue pour les po^+-monoïdes du Théorème de Hahn-Banach pour les espaces vectoriels normés. Il est en fait *équivalent* au Théorème de Hahn-Banach (en théorie des ensembles sans choix). Il est probablement à attribuer à A. Tarski ([**Tars1**], *voir* aussi [**Wago**, Theorem 9.1]), bien que celui-ci ne l'ait pas formulé de la même façon:

THÉORÈME 10.13. *Le* po$^+$*-monoïde* $\overline{\mathbb{R}}^+$ *est un* po$^+$*-monoïde* injectif, i.e., *pour tout sous-*po$^+$*-monoïde* A *d'un* po$^+$*-monoïde* B*, tout homomorphisme de* po$^+$*-monoïdes de* A *vers* $\overline{\mathbb{R}}^+$ *se prolonge en un homomorphisme de* po$^+$*-monoïdes de* B *vers* $\overline{\mathbb{R}}^+$.

PREUVE. La principale difficulté est le cas où B est une extension *monogène* de A, *i.e.*, il existe $b \in B$ tel que $B = A + \mathbb{N}b$. Supposons donc que ce soit le cas et soit $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}^+$ un homomorphisme de *po*$^+$-monoïdes. Nous cherchons un candidat pour la valeur en b d'un prolongement de f. Notre candidat sera l'analogue de la *mesure extérieure* (de b) en théorie de la mesure, et ce sera le suivant:

$$\beta = f^*(b) = \bigwedge \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } x,\, y \in A \text{ et } x + nb \leq y \right\}$$

(avec la convention habituelle $\bigwedge \varnothing = \infty$).

FAIT 1. *Pour tous* $(x, y) \in A \times A$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $x + nb \leq y$ *implique que* $f(x) + n\beta \leq f(y)$.

PREUVE DU FAIT. Pour $n = 0$ la conclusion résulte du fait que f est croissante. Pour $n \neq 0$, l'inégalité $\beta \leq (f(y) - f(x))/n$ a lieu par définition, d'où $n\beta \leq f(y) - f(x)$, d'où, par définition de l'opération $-$ sur $\overline{\mathbb{R}}^+$, $f(x) + n\beta \leq f(y)$. $\square$ Fait 1.

FAIT 2. *Soient* x *et* y *dans* A*, soient* m *et* n *dans* $\mathbb{N}$ *tels que* $x + mb \leq y + nb$. *Alors* $f(x) + m\beta \leq f(y) + n\beta$.

PREUVE DU FAIT. Par définition de β, $f(y) + n\beta$ est la borne inférieure de tous les $f(y) + n \cdot \big((f(v) - f(u))/r\big)$ pour tous les $(u, v) \in A \times A$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $u + rb \leq v$. Il s'agit donc de montrer que pour tout triplet (u, v, r) comme ci-dessus,

$$f(x) + m\beta \leq f(y) + n \cdot \big((f(v) - f(u))/r\big),$$

soit, en multipliant membre à membre par r et en remarquant que $n(s-t) = (ns) - (nt)$ pour tous $s \geq t$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ (on pose $0 \cdot \infty = 0$) et que f est un homomorphisme de monoïdes,

$$f(rx) + mr\beta \leq f(ry) + (f(nv) - f(nu)),$$

soit, d'après le Lemme 10.12 et puisque f est un homomorphisme de monoïdes,

$$f(rx) + mr\beta \leq f(ry + nv) - f(nu),$$

soit, par définition de l'opération $-$ sur $\overline{\mathbb{R}}^+$,

$$f(rx) + f(nu) + mr\beta \leq f(ry + nv),$$

soit, puisque f est un homomorphisme de monoïdes,

$$f(rx + nu) + mr\beta \leq f(ry + nv).$$

Par le Fait 1, pour montrer cette inégalité, il suffit de montrer que

$$rx + nu + mrb \leq ry + nv.$$

Or, en multipliant par r l'inégalité $x+mb \leq y+nb$, on obtient $rx+mrb \leq ry+nrb$, d'où, en ajoutant nu membre à membre et en se souvenant que $u+rb \leq v$, on obtient

$$\begin{aligned} rx + nu + mrb &\leq ry + nu + nrb \\ &= ry + n(u + rb) \\ &\leq ry + nv, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité désirée. □ Fait 2.

Il résulte immédiatement du Fait 2 et de l'antisymétrie de la relation d'ordre naturelle sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ que pour tous x, y dans A et pour tous m, n dans $\mathbb{N}$, $x+mb = y+nb$ implique que $f(x) + m\beta = f(y) + n\beta$. Ceci permet donc de définir une application g de $A + \mathbb{N}b$ vers $\overline{\mathbb{R}}^+$ en posant

$$(\forall (x, n) \in A \times \mathbb{N})\big(g(x + nb) = f(x) + n\beta\big)$$

(remarquer à cette occasion l'analogie avec la preuve du Théorème de Hahn-Banach!). Il est alors trivial que g est un homomorphisme de monoïdes. Le fait que g est *croissante* résulte immédiatement du Fait 2, et ainsi, g est un homomorphisme de po^+-monoïdes. Il est trivial que g prolonge f.

Passons maintenant au cas général. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des homomorphismes de po^+-monoïdes de la forme $g\colon C \to \overline{\mathbb{R}}^+$ où $A \subseteq C \subseteq B$ et g prolonge f, ordonné par inclusion (donc $g \leq h$ quand $g \subseteq h$, *i.e.*, h prolonge g). Il est trivial que $\mathcal{E}$ est non vide (f lui appartient) et inductif (la réunion de toute chaîne de $\mathcal{E}$ en est un majorant), donc, par le Lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ admet un élément maximal, disons $g\colon C \to \overline{\mathbb{R}}^+$. Pour tout $b \in B$, g admet par la première partie un prolongement $g'\colon C+\mathbb{N}b \to \overline{\mathbb{R}}^+$, et par suite, par maximalité de g, $g = g'$, d'où $b \in C$: ceci prouve que $C = B$, et donc que g est un homomorphisme de po^+-monoïdes de B vers $\overline{\mathbb{R}}^+$ prolongeant f. □

Remarque. On peut rendre la dernière partie de la preuve ci-dessus plus "économique" (aux dépens malheureusement de la clarté de l'ensemble), en utilisant le Théorème de Hahn-Banach au lieu du Lemme de Zorn, par un argument que nous avons d'ailleurs déjà utilisé dans la preuve du Théorème 1.13. Une fois de plus, signalons que le Théorème 10.13 est équivalent au Théorème de Hahn-Banach.

Remarque. Il existe, en fait, une caractérisation "interne" complète des po^+-monoïdes injectifs—*voir* [**Wehr2**, Theorem 3.11]. En particulier, *pour tout groupe réticulé complet divisible G, $G^+ \cup \{\infty\}$ est un* po$^+$*-monoïde injectif.* Cependant, $\overline{\mathbb{R}}^+$ est le po^+-monoïde injectif fondamental, dans le sens [**Wehr3**, Corollary 1.6] où *les* po$^+$*-monoïdes injectifs sont exactement les rétractes des puissances de* $\overline{\mathbb{R}}^+$. La preuve du premier fait est similaire à celle de l'injectivité de $\overline{\mathbb{R}}^+$, mais celle du second fait est sensiblement plus longue et compliquée, et nous ne la présenterons pas ici.

Le corollaire suivant est une autre forme équivalente du théorème de Hahn-Banach (*voir* [**Wago**, Theorem 9.1]):

Corollaire 10.14. *Soit A un* po$^+$*-monoïde et soit a un élément de A. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe un homomorphisme de* po$^+$*-monoïdes* $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *tel que* $f(a) = 1$*;*
(ii) *Pour tout entier naturel* n*,* $(n+1)a \not\leq na$*.*

Preuve. Si (i) est satisfait (avec l'homomorphisme f), alors pour tout entier naturel n, $(n+1)a \leq na$ entraîne $(n+1)f(a) \leq nf(a)$, soit $n+1 \leq n$, contradiction; par suite, $(n+1)a \not\leq na$.

Réciproquement, supposons que pour tout entier naturel n, $(n+1)a \not\leq na$. Ceci est exactement ce qu'il nous faut pour pouvoir définir un homomorphisme de po^+-monoïdes $f\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ par

$$(\forall n \in \mathbb{N})\big(f(na) = n\big).$$

Par le Théorème 10.13, il existe un homomorphisme de po^+-monoïdes $g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}^+$ prolongeant f. On a alors $g(a) = 1$. □

Revenons un instant à la "mesure extérieure" $f^*(b)$ comme elle a été définie dans la preuve ci-dessus; elle prend, en raison du résultat du Théorème 10.13, la signification suivante:

Lemme 10.15. *Soit* A *un sous-monoïde d'un* po$^+$*-monoïde* B*, soit* $b \in B$ *et soit* $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *un homomorphisme de* po$^+$*-monoïdes. Posons*

$$I_f(b) = \big\{\beta \in \overline{\mathbb{R}}^+ \mid \big(\exists g \in \mathrm{Hom}(A + \mathbb{N}b, \overline{\mathbb{R}}^+)\big)(g(b) = \beta)\big\}.$$

Alors $f^*(b)$ *est le plus grand élément de* $I_f(b)$*.*

Preuve. Nous avons vu dans la preuve du Théorème 10.13 qu'il existe un homomorphisme de po^+-monoïdes $g\colon A + \mathbb{N}b \to \overline{\mathbb{R}}^+$, prolongeant f, tel que $g(b) = f^*(b)$. De plus, puisque $\overline{\mathbb{R}}^+$ est un po^+-monoïde injectif, il existe un homomorphisme de po^+-monoïdes $h\colon B \to \overline{\mathbb{R}}^+$ prolongeant g. Puisque $h(b) = g(b) = f^*(b)$, il vient que $f^*(b)$ appartient à $I_f(b)$.

Soit maintenant β un élément de $I_f(b)$. Par définition, il existe un homomorphisme de po^+-monoïdes $g\colon B \to \overline{\mathbb{R}}^+$ prolongeant f tel que $g(b) = \beta$. Pour tous x et y dans A et tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $x + nb \leq y$, nous obtenons alors que $f(x) + n\beta = g(x + nb) \leq g(y) = f(y)$, d'où $\beta \leq (f(y) - f(x))/n$; en prenant la borne inférieure du membre de droite sur tous les triplets possibles (x, y, n), on obtient $\beta \leq f^*(b)$; d'où la conclusion. □

On aurait pu définir de la même façon $f_*(b)$ et démontrer que c'est le plus petit élément de $I_f(b)$; cependant, nous n'aurons pas besoin de ce résultat ici.

Définition. Soit A un po^+-monoïde. Le *dual* de A est $A^* = \mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$, considéré comme sous-$po^+$-monoïde de $\overline{\mathbb{R}}^{+A}$. Le *bidual* de A est $A^{**} = (A^*)^*$. L'*homomorphisme canonique* de A vers son bidual est l'"évaluation"

$$\begin{aligned} &A \to A^{**}, \\ &a \mapsto \big(a^{**}\colon A^* \to \overline{\mathbb{R}}^+,\ f \mapsto f(a)\big) \end{aligned}$$

Notons donc que l'évaluation de A vers A^{**} est un homomorphisme de po^+-monoïdes. Le but du Théorème suivant est de caractériser l'évaluation d'un po^+-monoïde-monoïde donné:

THÉORÈME 10.16. *Soit A un* po$^+$*-monoïde et soient a et b des éléments de A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $a^{**} \leq b^{**}$;
(ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k na \leq 2^k(n+1)b$.*

PREUVE. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k na \leq 2^k(n+1)b$, alors pour tout $f \in A^*$, $2^k nf(a) \leq 2^k(n+1)f(b)$, d'où $f(a) \leq (1+1/n)f(b)$. Ceci a lieu pour tout n, d'où $f(a) \leq f(b)$. Ceci a lieu pour tout f, d'où $a^{**} \leq b^{**}$.

Réciproquement, supposons que $a^{**} \leq b^{**}$. Par définition, pour tout $f \in A^*$, $f(a) \leq f(b)$. Soit $A' = \mathbb{N}a + \mathbb{N}b$. Puisque tout homomorphisme de A' vers $\overline{\mathbb{R}}^+$ se prolonge en un homomorphisme de A vers $\overline{\mathbb{R}}^+$ (Théorème 10.13), nous obtenons aussi

$$(\forall f \in A'^*)(f(a) \leq f(b)).$$

En vertu du Lemme 10.15, ceci peut encore s'écrire

$$(\forall f \in (\mathbb{N}b)^*)(f^*(a) \leq f(b)).$$

FAIT 1. *Il existe un entier naturel m tel que $a \leq mb$.*

PREUVE DU FAIT. Supposons que non. Soit f la fonction nulle sur $\mathbb{N}b$. Alors pour tous x et y dans $\mathbb{N}b$, on ne peut avoir $x + a \leq y$, et par suite $f^*(a) = \infty$, ce qui contredit $f^*(a) \leq f(b) = 0$. □ Fait 1.

Fixons-nous désormais un entier naturel non nul m tel que $a \leq mb$. Distinguons alors deux cas.

Cas 1. *Il existe un entier naturel l tel que $(l+1)b \leq lb$.*

Soit alors k un entier naturel tel que $2^k \geq m$ et $2^k \geq l$. Alors $a \leq 2^k b$ et $(2^k+1)b \leq 2^k b$. Cette dernière inégalité entraîne, par un raisonnement facile par récurrence, que $2^{2k}b \leq 2^k b$. Par suite, $2^k a \leq 2^{2k}b \leq 2^k b$, d'où *a fortiori* $2^k na \leq 2^k(n+1)b$ pour tout entier naturel n.

Le cas restant occupera le reste de la preuve.

Cas 2. *Pour tout entier naturel l, $(l+1)b \not\leq lb$.*

On peut alors définir comme dans la preuve du Corollaire 10.14 un unique homomorphisme de po^+-monoïdes $f\colon \mathbb{N}b \to \overline{\mathbb{R}}^+$ par

$$(\forall l \in \mathbb{N})\big(f(lb) = l\big).$$

FAIT 2. *Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel non nul k tel que $nka \leq (n+1)kb$.*

PREUVE DU FAIT. Si $n = 0$ il suffit de prendre $k = 1$; supposons donc que $n > 0$. Puisque $f^*(a) \leq f(b) = 1 < 1 + 1/2n$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que $pb + ra \leq qb$ et $(q-p)/r < 1 + 1/2n$. Par suite, $q \leq p + r + s$ pour un certain $s \in \mathbb{N}$ tel que $s < r/2n$. Il vient alors que $pb + ra \leq (p+r+s)b$, *i.e.*, $pb + ra \leq pb + (r+s)b$. Un raisonnement facile par récurrence donne alors que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $pb + rla \leq pb + l(r+s)b$, d'où $rla \leq (p + l(r+s))b$. En multipliant les deux membres par $2n$ et en se souvenant que $2ns < r$, on obtient que $2nrla \leq (2pn + 2nrl + rl)b$. Prenons alors $l > 2pn/r$. Il vient que $2nrla \leq (2nrl + 2rl)b$, soit $nka \leq (n+1)kb$ avec $k = 2rl$. □ Fait 2.

Soit alors n un entier naturel. Appliquons alors le Fait 2 à $2n$ au lieu de n. Ainsi, il existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $2nla \leq (2n+1)lb$. Soit m un entier naturel tel que $l/2^m \leq 1/(2n+1)$. Soit q le plus petit entier naturel tel que $lq \geq 2^m$. On a alors

$$\begin{aligned} 2n2^m a &\leq 2nlqa && (\text{car } lq \geq 2^m) \\ &\leq (2n+1)lqb && (\text{car } 2nla \leq (2n+1)lb) \\ &\leq (2n+1)(2^m+l)b && (\text{car } l(q-1) < 2^m). \end{aligned}$$

Mais cependant, $(2n+1)(2^m+l) \leq (2n+1)(2^m + 2^m/(2n+1)) = 2^m(2n+2)$, d'où finalement $2n2^m a \leq (2n+2)2^m b$. On a donc bien $n2^k a \leq (n+1)2^k b$ avec $k = m+1$. □

L'Exercice 10.19 montre sur un exemple simple que le 2^k du Théorème ci-dessus ne peut être supprimé, même quand A est le cône positif d'un groupe abélien ordonné. Ceci est à opposer au critère suivant de plongement d'un po^+-monoïde dans une puissance de $\overline{\mathbb{R}}^+$:

Théorème 10.17. *Soit A un* po$^+$*-monoïde. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'application d'évaluation de A vers A^{**} est un plongement de* po$^+$*-monoïdes;*
(ii) *A se plonge dans une puissance de $\overline{\mathbb{R}}^+$;*
(iii) *A est antisymétrique et pour tous a et b dans A, si pour tout entier naturel n, $na \leq (n+1)b$, alors $a \leq b$.*

Preuve. (i)⇒(ii) résulte immédiatement du fait que A^{**} est un sous-po^+-monoïde de $\overline{\mathbb{R}}^{+^{A^*}}$. De plus, (ii)⇒(iii) est trivial. Montrons donc (iii)⇒(i). Supposons donc que A satisfait (i).

On commence par montrer le Fait suivant:

Fait 1. *A n'est pas 2-perforé.*

Preuve du Fait. Soient a et b dans A tels que $2a \leq 2b$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $na \leq (n+1)b$. C'est trivial pour $n = 0$ ou $n = 1$. Supposons avoir montré la propriété à tout rang inférieur ou égal à n, avec $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} (n+1)a = (n-1)a + 2a &\leq nb + 2a \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &\leq nb + 2b \quad (\text{car } 2a \leq 2b) \\ &= (n+2)b, \end{aligned}$$

ce qui montre donc la propriété au rang $n+1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $na \leq (n+1)b$. Par hypothèse, $a \leq b$. □ Fait 1.

Par suite, soient a et b deux éléments de A tels que $a^{**} \leq b^{**}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc, par le Théorème 10.16, $k \in \mathbb{N}$ tel que $n2^k a \leq (n+1)2^k b$; par le Fait 1, il vient $na \leq (n+1)b$. Puisque ceci a lieu pour tout n et par hypothèse, $a \leq b$. Par suite, puisque A est antisymétrique, $a^{**} = b^{**}$ implique que $a = b$. Par suite, l'évaluation de A vers A^{**} est un plongement; d'où (i). □

On peut donner une caractérisation beaucoup plus pratique (bien que cela n'apparaisse pas dans la formulation, plus complexe *a priori*) du fait qu'un po^+-monoïde

de raffinement donné se plonge dans une puissance de $\overline{\mathbb{R}}^+$. Cette caractérisation est la suivante [**Wehr3**, Theorem 2.16]:

> *Soit A un* po$^+$*-monoïde de raffinement. Alors A se plonge dans une puissance de $\overline{\mathbb{R}}^+$ si et seulement si A est antisymétrique et pour tous a et b dans A et toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq b + c_n$ et $\sum_{i<n} c_i \leq b$, alors $a \leq b$.*

C'est donc un analogue de "le terme général de toute série convergente tend vers 0". La preuve de cette caractérisation demande beaucoup plus de travail que celle du Théorème 10.17, et nous ne la présenterons pas ici.

Exercices du Chapitre 10

Exercice 10.1. Soit A un po^+-monoïde. Montrer les assertions suivantes:

(a) Si A est algébrique, alors pour tous a, b, et c dans A, $a \ll b$ et $b \leq c$ implique $a \ll c$.
(b) Si A est antisymétrique, alors pour tous a, b, et c dans A, $a \leq b$ et $b \ll c$ implique $a \ll c$.
(c) Trouver un contrexemple antisymétrique à la réciproque de (a).
(d) Trouver un contrexemple à la réciproque de (b), mais montrer que dans le cas d'un po^+-monoïde algébrique, (b) est une caractérisation de l'antisymétrie.

(***Indication:*** commencer par prospecter parmi les exemples donnés dans le texte!)

Exercice 10.2. Dans tout ensemble préordonné $(P, \leq)$, on pose $x < y \Leftrightarrow (x \leq y$ et $y \not\leq x)$ et $x \equiv y \Leftrightarrow (x \leq y$ et $y \leq x)$. Pour tous po^+-monoïdes A et B, on définit une relation binaire (encore notée $\leq$) sur $A \times B$ par

$$(a, b) \leq (a', b') \Longleftrightarrow \big(a < a' \text{ ou } (a \equiv a' \text{ et } b \leq b')\big).$$

(a) Montrer que $\leq$ est une relation de préordre sur $A \times B$ (*préordre lexicographique*).
(b) Montrer que si A satisfait l'énoncé

$$(\forall x, y, z)(x < y \Rightarrow x + z < y + z),$$

alors $\leq$ est un préordre de po^+-monoïde sur $A \times_{\text{lex}} B$.
(c) Montrer que si [le préordre sur] B n'est pas grossier, alors la réciproque de (b) est vraie.
(d) En particulier, si A ne satisfait pas l'énoncé indiqué dans (b) et B n'est pas grossier, alors le préordre lexicographique sur $A \times B$ n'est pas compatible avec l'addition. Indiquer de tels exemples.

Exercice 10.3. Montrer qu'un treillis $(A, \vee, \wedge)$ est distributif si et seulement si le semi-groupe $(A, \vee)$ (resp., $(A, \wedge)$) satisfait la propriété de raffinement.

Exercice 10.4.

(a) Montrer que tout po^+-monoïde pseudo-simplifiable satisfait l'énoncé suivant:

$$(\forall a, b)(a + b \leq 2b \Rightarrow a \leq b).$$

(b) Soit $\mathbb{T}$ l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{Q}$ de la forme $[0, a]$ $(a \in \mathbb{Q}^+)$ ou $[0, a[$ $(a \in (\mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}) \cup \{\infty\})$, muni de l'addition définie par

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{x + y \mid x \in \mathfrak{a} \text{ et } y \in \mathfrak{b}\}.$$

(c) Montrer que cette addition est une loi de composition interne sur $\mathbb{T}$.
(d) Montrer que $(\mathbb{T}, +, \{0\}, \subseteq)$ est un po^+-monoïde antisymétrique de raffinement.
(e) Montrer que $(\mathbb{T}, +, \{0\}, \subseteq)$ n'est pas pseudo-simplifiable (***Indication:*** considérer $\mathfrak{a} = [0,\ 1]$ et $\mathfrak{b} = [0,\ 1[$).

Exercice 10.5. Montrer que tout po^+-monoïde de raffinement fort satisfait l'énoncé

$$(\forall a, b, c)\big(c \ll a + b \Leftrightarrow (\exists a' \ll a)(\exists b' \ll b)(c = a' + b')\big).$$

Exercice 10.6. Montrer que tout po^+-monoïde de raffinement fort satisfait l'énoncé

$$(\forall a, b, c)\big(a + c = b + c \Longleftrightarrow (\exists d)(\exists a' \ll c)(\exists b' \ll c)(a = d + a' \text{ et } b = d + b')\big).$$

Exercice 10.7. Soit PVI ("propriété de la valeur intermédiaire") l'axiome suivant:

$$(\forall x, y, z)\big(x \leq y \leq x + z \Longrightarrow (\exists t \leq z)(y = x + t)\big).$$

Montrer que tout po^+-monoïde de raffinement fort satisfait PVI.

Exercice 10.8. Le but de cet exercice est de montrer que *tout* po$^+$*-monoïde de raffinement satisfaisant* PVI *satisfait la propriété d'interpolation finie* (cette dernière figurant au début du Chapitre 9). Notons PI la propriété d'interpolation finie. Soit donc A un po^+-monoïde de raffinement fort satisfaisant PVI; soient a_0, a_1, b_0, et b_1 dans A tels que $\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}$.

(a) En vertu de quel axiome satisfait par A existe-t-il d_0, d_1, e_0, et e_1 dans A tels que $a_0 + d_0 = a_1 + d_1 = b_0$ et $a_0 + e_0 = a_1 + e_1 = b_1$?
(b) En vertu de quel axiome satisfait par A existe-t-il des éléments r_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) de A tels que la matrice suivante

	a_1	d_1
a_0	r_1	r_2
d_0	r_3	r_4

est une matrice de raffinement?
(c) Montrer qu'il existe $s_0 \leq e_0$ et $s_1 \leq r_2$ tels que $a_1 = r_1 + (s_0 + s_1)$.
(d) Soit $c = a_0 + s_0$. Montrer que $\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \leq c \leq \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \end{matrix}$. Conclure.

Il est à noter qu'il existe des po^+-monoïdes de raffinement ne satisfaisant pas PVI, *voir* l'exercice suivant.

Exercice 10.9. * Soit A l'ensemble de tous les segments initiaux non vides de $\mathbb{Q}^+$, *i.e.*, les parties $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{Q}^+$ telles que $0 \in \mathfrak{a}$ et

$$(\forall x \in \mathfrak{a})(\forall y \in \mathbb{Q}^+)(y \leq x \Rightarrow y \in \mathfrak{a}).$$

On munit A de l'addition définie par

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{x + y \mid x \in \mathfrak{a} \text{ et } y \in \mathfrak{b}\}$$

et de son ordre *algébrique*.

(a) Montrer que l'addition définie ci-dessus est une loi de composition interne sur A.

(b) Montrer que A est un po^+-monoïde antisymétrique de raffinement.
(c) Montrer que A satisfait PI (*voir* l'Exercice 10.8 pour la définition).
(d) Montrer que A ne satisfait pas PVI (*voir* l'Exercice 10.8 pour la définition).

EXERCICE 10.10. * Montrer que tout po^+-monoïde de raffinement fort satisfait l'énoncé

$$(\forall a, b, c, d) \begin{pmatrix} a+c \\ b+c \end{pmatrix} \leq d \Rightarrow (\exists x) \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \leq x \text{ et } x + c \leq d \right) \Bigg).$$

EXERCICE 10.11. * Montrer que tout po^+-monoïde de raffinement fort satisfait l'énoncé

$$(\forall a, b, c, d) \left(d \leq \begin{matrix} a+c \\ b+c \end{matrix} \Rightarrow (\exists x) \left(x \leq \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \text{ et } d \leq x + c \right) \right)$$

(on pourra au préalable utiliser le résultat de l'Exercice 10.8 pour se ramener au cas où $c \leq d$).

EXERCICE 10.12. * Soit A un po^+-monoïde, soient I et J deux ensembles finis et soient a_i, b_i ($i \in I$) et a_j, b_j ($j \in J$) des éléments de A (on ne demande *pas* que $I \cap J$ soit vide). On considère le système d'inéquations à une inconnue $\mathbf{x}$ suivant:

$$\Sigma\colon \begin{cases} b_i \leq a_i + \mathbf{x} & (\text{tout } i \in I) \\ a_j + \mathbf{x} \leq b_j & (\text{tout } j \in J) \end{cases}$$

Par définition, le *résolvant* de Σ est l'ensemble suivant d'inégalités:

$$\begin{cases} a_j \leq b_j & (\text{tout } j \in J), \\ a_j + b_i \leq a_i + b_j & (\text{tout } (i, j) \in I \times J). \end{cases}$$

(a) Montrer que si Σ admet une solution dans un sur-po^+-monoïde de A, alors A satisfait le résolvant de Σ.
(b) Montrer que si A est un po^+-monoïde de raffinement fort et si A satisfait le résolvant de Σ, alors Σ admet une solution dans A (on pourra utiliser les résultats des Exercices 10.10 et 10.11 précédents).

Pour plus de détails, *voir* [**ShWe**].

EXERCICE 10.13.

(a) Soit A un po^+-monoïde algébrique pseudo-simplifiable. Montrer que pour tous a, b, a', et b' dans A tels que $a' + b \leq a + b'$ et $a' \leq b'$, il existe $x \in A$ tel que $b \leq a + x$ et $b' = a' + x$.

On se donne désormais un po^+-monoïde algébrique pseudo-simplifiable antisymétrique A satisfaisant les propriétés suivantes:
(i) Pour tous a, b dans A, $\{a, b\}$ admet une borne inférieure, que nous noterons comme à l'accoutumée $a \wedge b$.
(ii) L'addition de A est distributive sur $\wedge$, *i.e.*, pour tous éléments a, b, et c de A,

$$(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c).$$

Le but de ce qui suit est de montrer que A satisfait la propriété de raffinement. Soient donc a, a', b, et b' dans A tels que $a + a' = b + b'$. Nous allons

chercher une matrice de raffinement de la forme

	b	b'
a	$a \wedge b$	u
a'	v	$a' \wedge b'$

(b) Montrer que $a + a' \wedge b' = a \wedge b + b'$.

(c) En appliquant (a) (plusieurs fois!), montrer qu'il existe deux éléments u' et u'' de A tels que

$$\begin{cases} a = a \wedge b + u' & \text{et} \quad b' \quad \leq a' \wedge b' + u', \\ b' = a' \wedge b' + u'' & \text{et} \quad a \quad \leq a \wedge b + u''. \end{cases}$$

(d) Posons $u = u' \wedge u''$. Montrer que $a \wedge b + u = a$ et $a' \wedge b' + u = b'$. Conclure.

Noter que ce résultat généralise le résultat que tout cône positif d'un groupe réticulé abélien satisfait la propriété de raffinement. L'exercice suivant donne une application de ce résultat.

Exercice 10.14. * Soit A un po^+-monoïde de raffinement. On considère l'ensemble $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ des homomorphismes de po^+-monoïdes de A vers $\overline{\mathbb{R}}^+$, qui est un sous-monoïde de ${\overline{\mathbb{R}}^+}^A$. Pour tous éléments a et b de $\overline{\mathbb{R}}^+$, on définit $b - a$ comme étant le plus grand élément x de $\overline{\mathbb{R}}^+$ tel que $a + x = b$.

(a) Montrer que pour tous $a \leq a'$ et $b \leq b'$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$,

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b).$$

(b) Montrer que pour tous f et g dans $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ tels que $f \leq g$ (*i.e.*, $(\forall x \in A)(f(x) \leq g(x))$), $g - f$ défini par

$$(\forall x \in A)\big((g - f)(x) = g(x) - f(x)\big)$$

appartient à $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$. En déduire que $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ est algébrique.

(c) En considérant $h - h$ (dans le cas $f + h \leq g + h$), montrer que $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ est pseudo-simplifiable.

(d) Montrer que pour tous f et g dans $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$, l'application h de A vers $\overline{\mathbb{R}}^+$ définie par

$$(\forall a \in A)\left(h(a) = \bigwedge\{f(x) + g(y) \mid x, y \in A \text{ et } x + y = a\}\right)$$

appartient à $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$, et est la borne inférieure de $\{f, g\}$ dans $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$.

(e) Montrer que pour tous f, g, et h dans $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$, $(f \wedge g) + h = (f + h) \wedge (g + h)$.

(f) Montrer que $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ est un po^+-monoïde de raffinement fort (on pourra utiliser l'exercice précédent).

(g) Montrer que $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{N}})$ est un sous-po^+-monoïde de $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$, et que c'est aussi un po^+-monoïde de raffinement fort.

Exercice 10.15. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid x \leq y\}$, muni de l'addition et de l'ordre déduits de ceux de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

(a) Montrer que A est un po^+-monoïde *non algébrique*, satisfaisant cependant la propriété de raffinement (il satisfait même plus que cela, *voir* l'Exercice 5.18).

(b) Soit $f\colon A \to \mathbb{R}^+,\ (x,y) \mapsto x$ et $g\colon A \to \mathbb{R}^+,\ (x,y) \mapsto y$. Montrer que f et g appartiennent à $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$, que $f \leq g$ pour l'ordre sur $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ déduit de celui de $\overline{\mathbb{R}}^{+A}$ (*i.e.*, $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in A$), mais qu'il n'existe cependant pas d'élément h de $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ tel que $f + h = g$. *En déduire que* $\mathrm{Hom}(A, \overline{\mathbb{R}}^+)$ *n'est pas algébrique.*

Exercice 10.16. Comme dans les cas traités précédemment, disons qu'un monoïde commutatif E est *injectif* quand pour tout sous-monoïde A d'un monoïde commutatif B, tout homomorphisme de monoïdes de A vers E se prolonge en un homomorphisme de B vers E.

(a) Montrer que $\{0\}$ est un monoïde commutatif injectif.

Le but de cet exercice est de montrer que $\{0\}$ est le seul monoïde commutatif injectif. Soit donc E un monoïde commutatif injectif.

(b) Soit M le sous-monoïde de $\mathbb{N}^2$ engendré par $\alpha = (1,0)$ et $\beta = (1,1)$. Montrer que pour tous a et b dans E, il existe un unique homomorphisme de monoïdes $f\colon M \to E$ tel que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$.

(c) En considérant l'inclusion $M \subseteq \mathbb{N}^2$, montrer qu'il existe $c \in M$ tel que $a + c = b$.

(d) En déduire que $(E, +, 0)$ est un groupe.

(e) En considérant l'inclusion de E dans $E' = E \cup \{\infty\}$ où ∞ est un élément non dans E et l'addition de E' est définie de telle sorte que ∞ absorbe tout élément de E, montrer qu'il existe $c \in E$ tel que $(\forall x \in E)(x + c = c)$. Conclure.

Exercice 10.17. Soit A un po^+-monoïde et soit a un élément de A.

(a) Montrer que $a^{**} = 0$ si et seulement si $a \leq 0$.

(b) Montrer que $2a^{**} = a^{**}$ si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $(n+1)a \leq na$.

Exercice 10.18. Soit A un po^+-monoïde.

(a) Pour deux éléments a et b de A et un nombre rationnel positif $r = p/q$ ($p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), exprimer dans A la condition $a^{**} \leq rb^{**}$ (on pourra utiliser le Théorème 10.16).

(b) Pour deux éléments a et b de A et un nombre réel positif r, montrer que $a^{**} \leq rb^{**}$ si et seulement si pour tous entiers naturels non nuls p et q tels que $r < p/q$, il existe un entier naturel non nul k tel que $kqa \leq kpb$ (***Indication:*** si $r < p/q$, considérer p' et q' tels que $r < p'/q' < p/q$, puis $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $(1 + 1/n)(p'/q') < p/q$. Appliquer le (a) à p'/q').

Exercice 10.19.

(a) Montrer que pour tous nombres réels positifs a et b, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Désormais, soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \sqrt{x}$.

(b) Soit P le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ défini par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid x + f(y) \geq 0\}.$$

Montrer que P est le cône positif d'une structure de groupe ordonné sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Nous noterons G le groupe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni du cône positif A précédent. Munissons A de la restriction de l'ordre de G. Soit $a = (1,0)$ et soit $b = (0,1)$.

(c) Montrer que $a^{**} \leq b^{**}$ (on pourra montrer que pour tout entier naturel n, $(n^2 - n)a \leq n^2 b$).

(d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $n \geq k$, $nka \not\leq (n+1)kb$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $na \not\leq (n+1)b$. De façon plus générale, il n'existe pas de *constante* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que pour une infinité d'entiers naturels n, $nka \leq (n+1)kb$.

Exercice 10.20. Soit G un groupe abélien ordonné dirigé. Montrer que G^+ se plonge dans une puissance de $\overline{\mathbb{R}}^+$ si et seulement si G se plonge dans un groupe réticulé complet (on rappelle que le dernier énoncé est équivalent à dire que G est "intégralement clos").

Exercice 10.21.

(a) Soit A un sous-po^+-monoïde d'un po^+-monoïde algébrique. Montrer que A satisfait les deux énoncés suivants:

$$(\forall x, y, u, v)\big((x + u \leq y + u \text{ et } u \leq v) \Rightarrow x + v \leq y + v\big),$$
$$(\forall x, y, u, v)\big((x + u = y + u \text{ et } u \leq v) \Rightarrow x + v = y + v\big).$$

(b) Soit $A = \mathbb{N} \times_{\text{lex}} \overline{\mathbb{N}}$ (*voir* l'Exercice 10.2). Montrer que A ne se plonge dans aucun po^+-monoïde algébrique (prendre par exemple $u = (0, \infty)$ et $v = (1, 0)\ldots$).

(c) ** Soit A un po^+-monoïde quelconque et soient a et b deux éléments de A. Montrer qu'il existe un sur-po^+-monoïde B de A et un élément c de B tel que $a + c = b$ si et seulement si A satisfait $a \leq b$ et les deux énoncés

$$(\forall x, y)(x + a \leq y + a \Rightarrow x + b \leq y + b),$$
$$(\forall x, y)(x + a = y + a \Rightarrow x + b = y + b).$$

(on pourra essayer une "construction libre" au-dessus de A, *i.e.*, construire B et c satisfaisant "seulement le strict nécessaire").

Exercice 10.22. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y = 0 \text{ ou } (x > 0 \text{ et } y > 0)\}$, muni de son ordre algébrique.

(a) Montrer que A est un po^+-monoïde antisymétrique de raffinement.
(b) Montrer que l'évaluation $a \mapsto a^{**}$ de A vers A^{**} est injective.
(c) Soient $a = (1, 1)$ et $b = (2, 1)$. Montrer que $a^{**} \leq b^{**}$, mais que $a \not\leq b$.

Exercice 10.23. Soit $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ muni de son ordre algébrique.

(a) Montrer que pour tous a et b dans A, $a^{**} \leq b^{**}$ si et seulement si $a \leq b$ dans $\mathbb{N}$.
(b) Montrer que l'évaluation de A est un homomorphisme injectif de po^+-monoïdes de A dans A^{**}, mais pas un plongement de po^+-monoïdes.

Exercice 10.24. Soit A le sous-monoïde de $\overline{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ engendré par $a = (1, 0)$ et $b = (\infty, 1)$, muni de son ordre algébrique. Montrer que A est un po^+-monoïde de raffinement fort totalement ordonné.

CHAPITRE 11

Monoïdes ordonnés de types de décomposition

Nous allons voir dans ce chapitre les objets les plus étranges et mystérieux parmi tous ceux présentés jusqu'ici. Leur motivation de départ est bien simple: supposons disposer d'un ensemble Ω, d'une sous-algèbre de Boole $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{P}(\Omega)$ et d'un groupe de permutations G de Ω dont les éléments laissent $\mathcal{B}$ globalement invariante (*c.à.d.*, pour tout $g \in G$, $g\mathcal{B} = \mathcal{B}$. Pour fixer les idées, on peut prendre le cas suivant:

— $X = \mathbb{R}^n$ (n entier naturel non nul fixé).
— $\mathcal{B}$ = tribu borélienne de Ω = plus petite sous-σ-algèbre de $\mathfrak{P}(\Omega)$ contenant pour éléments tous les ouverts de Ω.
— G = groupe des isométries affines de Ω.

Considérons alors la *mesure de Lebesgue* λ_n sur $\mathbb{R}^n$. C'est une application de $\mathcal{B}$ vers $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$, qui est *finiment* (et même *dénombrablement*) additive (dans le sens donné au Chapitre 1) et G-invariante. Par suite, pour tout $X \in \mathcal{B}$ et tout $g \in G$, $\lambda_n(gX) = \lambda_n(X)$. Est-ce le seul cas où l'on peut dire à coup sûr que deux ensembles ont la même mesure? Certainement pas! En effet, si plus généralement X et Y sont deux éléments de $\mathcal{B}$ et s'il existe des *partitions* $X = \bigcup_{i<k} X_i$ et $Y = \bigcup_{i<k} Y_i$ (les réunions sont *disjointes*) avec les X_i et les Y_i dans $\mathcal{B}$ telles que pour tout $i < k$, $Y_i = g_i X_i$ avec $g_i \in G$—on dit alors que X et Y sont *G-équidécomposables avec morceaux dans* $\mathcal{B}$—alors

$$\begin{aligned}\lambda_n(X) &= \sum_{i<k} \lambda_n(X_i)\\ &= \sum_{i<k} \lambda_n(g_i X_i)\\ &= \sum_{i<k} \lambda_n(Y_i)\\ &= \lambda_n(Y)\end{aligned}$$

(notons au passage que le fait que λ_n prenne ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ n'a aucune importance, tout monoïde commutatif conviendrait). En fait, dans cet exemple, puisque λ_n est *dénombrablement additive*, on aurait pu imposer aux décompositions ci-dessus de X et de Y d'être dénombrables au lieu d'être simplement finies, et le sujet est alors très différent, et même, de façon générale (mais pas systématique), beaucoup plus facile.

Une question que l'on pourrait alors poser est la suivante: *la réciproque est-elle vraie*? Plus précisément, deux éléments X et Y de $\mathcal{B}$ tels que $\lambda_n(X) = \lambda_n(Y)$ sont-ils équidécomposables? Dans cet exemple, la réponse est trivialement négative, en prenant par exemple $X = \{0\}$ et $Y = \varnothing$. La situation se serait corsée si l'on

avait identifié tous les ensembles de mesure nulle à $\varnothing$, *i.e.*, considéré le quotient de $\mathcal{B}$ par le σ-idéal des ensembles de mesure nulle; la réponse n'en serait pas moins restée négative, mais c'est beaucoup plus difficile à voir. Une situation encore plus étrange peut se produire en prenant le même Ω et le même G que ci-dessus, mais cette fois $\mathcal{B} = \mathfrak{P}(\Omega)$: on aurait pu alors montrer que pour $n \geq 3$, la boule unité de $\mathbb{R}^n$ est équidécomposable à la réunion de deux copies d'elle-même, ce qui entre en contradiction apparente avec le principe physique de conservation de la masse...

Dans le cas général, les classes ("types") d'équidécomposabilité d'éléments de $\mathcal{B}$ ne forment pas un monoïde (on peut ne pas pouvoir additionner deux parties de Ω car on ne dispose pas d'assez de place dans Ω pour pouvoir les "rendre disjointes"), mais se plongent de façon très naturelle dans un monoïde, que nous appellerons le *monoïde des types d'équidécomposabilité de* $\mathcal{B}$ *modulo* G. Cette définition peut à son tour être étendue à une algèbre de Boole quelconque (non nécessairement représentée comme une algèbre de parties d'un certain ensemble Ω), puis G peut être un "quasi-groupe d'automorphismes partiels", l'exemple le plus courant étant, pour un espace métrique (E, d), l'ensemble $\mathcal{G}$ des *isométries partielles* de E, *i.e.*, l'ensemble de toutes les *fonctions* $f\colon X \to Y$ où X et Y sont deux parties de E et pour tous x_0 et x_1 dans X, $d(x_0, x_1) = d(f(x_0), f(x_1))$. Ces complications sont de sinistre présage quant à l'existence d'une généralisation simple à énoncer de tout cela, aussi peut-on peut-être considérer comme une heureuse surprise que ce n'est pas le cas: tout cela est très facile à définir précisément, dans un cadre très général.

Définition. Soit M un monoïde *commutatif*. Une relation binaire $\to$ sur M est dite:

— *additive* quand pour tous a, a', b, et b' dans M, si $a \to a'$ et $b \to b'$, alors $a + b \to a' + b'$. Une *congruence* est une relation d'équivalence additive.
— *raffinante* quand pour tous a, b, et c dans M, si $a + b \to c$, alors il existe a' et b' dans M tels que $a \to a'$, $b \to b'$, et $c = a' + b'$.

Notons que toute congruence $\equiv$ sur M est, par définition, compatible avec l'addition, ce qui permet de définir le monoïde quotient $M/\equiv$. Rappelons par ailleurs (*voir* chapitre précédent) qu'un *monoïde de raffinement* est un monoïde commutatif satisfaisant la propriété de raffinement.

Proposition 11.1. *Soit M un monoïde de raffinement et soit $\equiv$ une congruence raffinante sur M. Alors $M/\equiv$ est un monoïde de raffinement.*

Preuve. Notons $x \mapsto [x]$ la projection canonique de M sur $M/\equiv$. Soient α_0, α_1, β_0 et β_1 des éléments de $M/\equiv$ tels que $\alpha_0 + \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1$. Soient a_i, b_i $(i < 2)$ des représentants de α_i, β_i $(i < 2)$. Par définition, $a_0 + a_1 \equiv b_0 + b_1$. Puisque $\equiv$ est raffinante, il existe a'_0 et a'_1 dans M tels que $a_0 \equiv a'_0$, $a_1 \equiv a'_1$, et $a'_0 + a'_1 = b_0 + b_1$. Puisque M est un monoïde de raffinement, on en déduit une matrice de raffinement

	b_0	b_1
a'_0	c_{00}	c_{01}
a'_1	c_{10}	c_{11}

avec les c_{ij} $(i, j < 2)$ dans M. Par suite, la matrice suivante est une matrice de raffinement:

	β_0	β_1
α_0	$[c_{00}]$	$[c_{01}]$
α_1	$[c_{10}]$	$[c_{11}]$

ce qui montre bien que $M/\equiv$ est un monoïde de raffinement. □

La Proposition suivante montre comment fabriquer de nombreuses congruences raffinantes à partir de relations binaires plus simples:

PROPOSITION 11.2. *Soit M un monoïde de raffinement et soit $\approx$ une relation d'équivalence raffinante (mais non nécessairement additive) sur M. Alors la relation binaire $\equiv$ définie par $x \equiv y$ si et seulement si il existe un entier naturel non nul n et des éléments x_i, y_i $(i < n)$ de M tels que pour tout $i < n$, $x_i \approx y_i$ et*

$$x = \sum_{i<n} x_i \quad \textit{et} \quad y = \sum_{i<n} y_i$$

est une congruence raffinante sur M; c'est de plus la plus petite (au sens de l'inclusion) congruence sur M contenant $\approx$.

Dans le contexte ci-dessus, on dit que $\equiv$ est la *congruence engendrée par* $\approx$, *i.e.*, la plus petite (au sens de l'inclusion) congruence sur M contenant $\approx$.

PREUVE. Il est trivial que $\equiv$ est réflexive et (puisque $\approx$ est symétrique) symétrique. La difficulté essentielle est de montrer que $\equiv$ est transitive. Soient donc x, y, et z trois éléments de M tels que $x \equiv y$ et $y \equiv z$. Par définition, il existe deux entiers naturels non nuls p et q et des éléments x_i, y'_i $(i < p)$ et y''_j, z_j $(j < q)$ de M tels que:

— Pour tout $i < p$, $x_i \approx y'_i$;
— Pour tout $j < q$, $y''_j \approx z_j$;
— $x = \sum_{i<p} x_i$, $y = \sum_{i<p} y'_i = \sum_{j<q} y''_j$ et $z = \sum_{j<q} z_j$.

En appliquant la propriété de raffinement, on obtient une matrice de raffinement

	y''_0	y''_1	$\cdots$	y''_{q-1}
y'_0	y_{00}	y_{01}	$\cdots$	$y_{0,q-1}$
y'_1	y_{10}	y_{11}	$\cdots$	$y_{1,q-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y'_{p-1}	$y_{p-1,0}$	$y_{p-1,1}$	$\cdots$	$y_{p-1,q-1}$

avec les y_{ij} dans M. Pour tout $i < p$, $x_i \approx y'_i = \sum_{j<q} y_{ij}$, donc, puisque $\approx$ est raffinante (et symétrique), il existe x_{ij} $(j < q)$ dans M tels que $x_i = \sum_{j<q} x_{ij}$ et pour tout $j < q$, $x_{ij} \approx y_{ij}$. De même, pour tout $j < q$, $\sum_{i<p} y_{ij} = y''_j \approx z_j$ et $\approx$ est raffinante, il existe donc z_{ij} $(i < p)$ dans M tels que $z_j = \sum_{i<p} z_{ij}$ et pour tout $i < p$, $y_{ij} \approx z_{ij}$. Par suite, $x = \sum_{i<p;\ j<q} x_{ij}$ et $z = \sum_{i<p;\ j<q} z_{ij}$ avec, pour tous $i < p$ et $j < q$, $x_{ij} \approx y_{ij}$ et $y_{ij} \approx z_{ij}$, d'où, puisque $\approx$ est transitive, $x_{ij} \approx z_{ij}$. Par suite, par définition, $x \equiv z$.

Pour montrer que $\equiv$ est une congruence, il reste à vérifier que $\equiv$ est additive, mais ceci résulte trivialement de la définition. Montrons maintenant que $\equiv$ est raffinante. Soient donc a, b, et c dans M tels que $a + b \equiv c$. Par définition, il existe un entier naturel non nul n et des éléments d_i, c_i $(i < n)$ de M tels que $a + b = \sum_{i<n} d_i$, $c = \sum_{i<n} c_i$ et pour tout $i < n$, $d_i \approx c_i$. Puisque M est un monoïde de raffinement, il existe une matrice de raffinement de la forme

	d_0	d_1	$\dots$	d_{n-1}
a	a_0	a_1	$\dots$	a_{n-1}
b	b_0	b_1	$\dots$	b_{n-1}

avec les a_i et les b_i dans M. Par suite, pour tout $i < n$, $a_i + b_i = d_i \approx c_i$, donc, puisque $\approx$ est raffinante, il existe des éléments a'_i et b'_i de M tels que $a_i \approx a'_i$, $b_i \approx b'_i$, et $c_i = a'_i + b'_i$. Posons alors $a' = \sum_{i<n} a'_i$ et $b' = \sum_{i<n} b'_i$. Alors $c = \sum_{i<n} c_i = \sum_{i<n} a'_i + \sum_{i<n} b'_i = a' + b'$. De plus, par définition, $a \equiv a'$ et $b \equiv b'$: ceci montre donc bien que $\equiv$ est raffinante.

Finalement, soit $\sim$ une congruence sur M contenant $\approx$; on montre que $\sim$ contient $\equiv$. Soient donc x et y deux éléments de M tels que $x \equiv y$. Par définition, il existe un entier naturel non nul n et des éléments x_i $(i < n)$ et y_i $(i < n)$ de M tels que $x = \sum_{i<n} x_i$ et $y = \sum_{i<n} y_i$ et pour tout $i < n$, $x_i \approx y_i$. Puisque $\approx$ est contenue dans $\sim$, $x_i \sim y_i$ pour tout $i < n$. Puisque $\sim$ est une congruence, $\sum_{i<n} x_i \sim \sum_{i<n} y_i$, *i.e.*, $x \sim y$, ce qui montre notre assertion. □

Pour une généralisation de ce résultat, *voir* l'Exercice 11.2.

Un cas particulier très important de congruence raffinante est celui obtenu en faisant opérer un groupe sur notre monoïde commutatif par automorphismes: si M est un monoïde et G est un groupe opérant sur M (*via* $(g, x) \mapsto g \cdot x$), on dit que G opère par automorphismes quand pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est un automorphisme de monoïde de M.

Lemme 11.3. *Soit G un groupe opérant par automorphismes sur un monoïde commutatif M. Alors la "relation d'équivalence orbitale" $\approx_G$,* c.à.d. *la relation d'équivalence définie par*

$$x \approx_G y \iff (\exists g \in G)(y = gx)$$

est raffinante.

Preuve. C'est beaucoup plus long à énoncer qu'à prouver! Si a, b, et c sont des éléments de M tels que $a + b \approx c$, alors il existe $g \in G$ tel que $c = g \cdot (a + b)$, d'où $c = g \cdot a + g \cdot b$ avec $a \to g \cdot a$ et $b \to g \cdot b$. □

Par suite, en utilisant la Proposition 11.2, si M est un monoïde de raffinement, alors la congruence $\equiv_G$ engendrée par $\approx_G$ est raffinante, et $M/\equiv_G$ est un monoïde de raffinement. Notons que par la Proposition 11.2, $\equiv_G$ est définie par

$$x \equiv_G y \iff (\exists n \in \mathbb{N})(\exists_{i<n} x_i \in M)(\exists_{i<n} g_i \in G)\left(x = \sum_{i<n} x_i \text{ et } y = \sum_{i<n} g_i x_i\right).$$

Comparer avec l'introduction de ce chapitre!

DÉFINITION-NOTATION. *Soit G un groupe opérant par automorphismes sur un monoïde de raffinement M. Nous noterons $\equiv_G$ la congruence sur M engendrée par l'équivalence orbitale associée à G, et M/G au lieu de $M/\equiv_G$.*

Nous allons à présent particulariser le choix du monoïde de raffinement M, obtenant ainsi finalement la définition d'équidécomposabilité de l'introduction de ce chapitre.

Dans un premier temps, M sera le cône positif d'un groupe abélien réticulé (il satisfait donc la propriété de raffinement). Il n'y a pas d'ambiguité sur le terme "automorphisme", car tout automorphisme d'un groupe réticulé pour la structure de groupe ordonné est aussi un automorphisme de groupe réticulé (car $\vee$ et $\wedge$ sont définissables en fonction de l'ordre). *Il est hors de question d'espérer que M/G reste un groupe réticulé dans le cas général.* C'est en fait une structure très mystérieuse! Tout ce que nous savons pour l'instant est que M/G satisfait la propriété de raffinement (c'est une application immédiate de 11.1 à 11.3). C'est même rarement le cas que M/G soit simplifiable. Bien que M/G ne soit pas non plus toujours antisymétrique, il existe de nombreux cas où il l'est, et la preuve de ce fait est loin d'être triviale:

THÉORÈME 11.4. *Soit A un groupe réticulé abélien σ-complet et soit G un groupe opérant par automorphismes sur A. Alors le préordre algébrique de A^+/G est antisymétrique.*

Il est à noter que les hypothèses choisies ici sont loin d'être les plus faibles possibles, *voir* [**Tars2**]: si M est ce qui est appelé dans [**Tars2**] une *algèbre cardinale* et G est un groupe qui opère sur M par automorphismes, alors M/G est antisymétrique.

PREUVE. Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A^+, posons

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \begin{cases} \bigvee \left\{\sum_{k<n} a_k \mid n\in\mathbb{N}\right\} & \text{si l'ensemble } \left\{\sum_{k<n} a_k \mid n\in\mathbb{N}\right\} \text{ est majoré dans } A, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des parties finies non vides de G. Pour tout $P\in\mathcal{G}$, définissons une relation binaire $\xrightarrow{P}$ par

$$x \xrightarrow{P} y \Longleftrightarrow (\exists_{g\in P} x_g \in A^+)\left(x = \sum_{g\in P} x_g \text{ et } y = \sum_{g\in P} g x_g\right).$$

Comme il a été vu dans l'expression générale de $\equiv_G$, il est immédiat que pour tous x et y dans A^+, $x\equiv_G y$ si et seulement si il existe $P\in\mathcal{G}$ tel que $x\xrightarrow{P} y$ (*i.e.*, $\equiv_G = \bigcup_{P\in\mathcal{G}} \xrightarrow{P}$).

Cependant, les relations $\xrightarrow{P}$ possèdent une particularité que $\equiv_G$ n'a pas, à savoir la suivante:

FAIT 1. *Pour tout $P\in\mathcal{G}$, la relation $\xrightarrow{P}$ est* σ-additive, i.e., *pour tous a et b dans A^+ et toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A^+, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n \xrightarrow{P} b_n$ et*

$$a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \quad \textit{et} \quad b = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n,$$

alors $a\xrightarrow{P} b$.

Preuve du Fait. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe par définition une famille $(a_{ng})_{g\in P}$ d'éléments de A^+ telle que $a_n = \sum_{g\in G} a_{ng}$ et $b_n = \sum_{g\in P} b_{ng}$. Pour tout $g \in G$, posons alors $a_g = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{ng}$. Alors

$$\begin{aligned} a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{g\in P} a_{ng} \\ &= \sum_{g\in P}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{ng} \\ &= \sum_{g\in P} a_g \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{g\in P} g a_{ng} \\ &= \sum_{g\in P} g \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{ng} \\ &= \sum_{g\in P} g a_g, \end{aligned}$$

donc, par définition, $a \xrightarrow{P} b$. □ Fait 1.

Fait 2. *Pour tout $P \in \mathcal{G}$, $\xrightarrow{P}$ est raffinante.*

Preuve du Fait. Soient a, b, et c des éléments de A^+ tels que $a+b \xrightarrow{P} c$. Par définition, il existe une famille $(d_g)_{g\in P}$ d'éléments de A^+ telle que

$$a+b = \sum_{g\in P} d_g \text{ et } c = \sum_{g\in P} g d_g.$$

En appliquant le fait que A^+ satisfait la propriété de raffinement, on obtient une matrice de raffinement de la forme

	tous les d_g $(g \in P)$
a	tous les a_g $(g \in P)$
b	tous les b_g $(g \in P)$

avec les a_g et b_g dans A^+. Soient alors $a' = \sum_{g\in P} g a_g$ et $b' = \sum_{g\in P} g b_g$. Alors il est immédiat de vérifier que $a \xrightarrow{P} a'$, $b \xrightarrow{P} b'$ et $c = a' + b'$. □ Fait 2.

On peut alors terminer la démonstration du Théorème 11.4. Soit donc $x \mapsto [x]$ la projection canonique de A^+ sur A^+/G. Il s'agit de montrer que pour tous éléments a et b de A^+, si $[a] \leq [b]$ et $[b] \leq [a]$ (où $\leq$ est l'ordre algébrique sur A^+/G), alors $[a] = [b]$.

Par définition, il existe deux éléments u et v de A^+ tels que $[a] + [u] = [b]$ et $[b] + [v] = [a]$. Par suite, $[a] + [u] + [v] = [a]$. Par suite, il existe un élément P de $\mathcal{G}$ tel que $a + u + v \xrightarrow{P} a$. Sans perte de généralité, l'élément neutre 1 de G appartient à P. Posons $a_0 = a$, $u_0 = u$, et $v_0 = v$. Soit n un entier naturel et supposons avoir construit a_n, u_n, et v_n dans A^+ tels que l'hypothèse de récurrence $a_n + u_n + v_n \xrightarrow{P} a_n$ soit satisfaite. Par le Fait 2, il existe des éléments a_{n+1}, u_{n+1}, et v_{n+1} de A^+ tels

que $a_n \xrightarrow{P} a_{n+1}$, $u_n \xrightarrow{P} u_{n+1}$, $v_n \xrightarrow{P} v_{n+1}$, et $a_n = a_{n+1} + u_{n+1} + v_{n+1}$. Par suite, $a_{n+1} + u_{n+1} + v_{n+1} = a_n \xrightarrow{P} a_{n+1}$ et l'hypothèse de récurrence est satisfaite. On a donc construit trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A^+ satisfaisant les conditions suivantes:

(i) $a_0 = a$, $u_0 = u$, et $v_0 = v$.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \xrightarrow{P} a_{n+1}$, $u_n \xrightarrow{P} u_{n+1}$, et $v_n \xrightarrow{P} v_{n+1}$.
(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_{n+1} + u_{n+1} + v_{n+1}$.

Soit alors $\alpha = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (*c'est ici que l'on commence en fait à utiliser la σ-complétude de A!*).

Fait 3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n = \alpha + \sum_{k\in\mathbb{N}} (u_{n+k+1} + v_{n+k+1}).$$

Preuve du Fait. Fixons n. Il résulte immédiatement de (iii) ci-dessus que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+m} + \sum_{k<m} (u_{n+k+1} + v_{n+k+1}) \\ &\geq \alpha + \sum_{k<m} (u_{n+k+1} + v_{n+k+1}), \end{aligned}$$

d'où, en prenant la borne supérieure sur tous les m,

$$\alpha + \sum_{k\in\mathbb{N}} (u_{n+k+1} + v_{n+k+1}) \leq a_n.$$

Réciproquement, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+m} + \sum_{k<m} (u_{n+k+1} + v_{n+k+1}) \\ &\leq a_{n+m} + \sum_{k\in\mathbb{N}} (u_{n+k+1} + v_{n+k+1}), \end{aligned}$$

d'où, en prenant la borne inférieure sur tous les m,

$$a_n \leq \alpha + \sum_{k\in\mathbb{N}} (u_{n+k+1} + v_{n+k+1}).$$

D'où finalement l'égalité. □ Fait 3.

En particulier,

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_{n+1}, \\ a + u &= \alpha + \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_{n+1}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \xrightarrow{P} u_{n+1}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \xrightarrow{P} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+1}$. Puisque l'élément neutre de G appartient à P, nous obtenons aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_{n+1} \xrightarrow{P} \sum_{n\in\mathbb{N}} v_{n+1}$ et $\alpha \xrightarrow{P} \alpha$. Par suite, $a + u \xrightarrow{P} a$, d'où $[b] = [a + u] = [a]$. □

Notons qu'à y regarder de plus près, la démonstration ci-dessus n'est qu'une version plus algébrique de la démonstration sans axiome du choix du théorème de Cantor-Bernstein qui s'énonce "s'il existe une injection de X dans Y et une injection de Y dans X, alors il existe une bijection de X sur Y". Notons aussi que dans tout cône positif d'un groupe réticulé, la propriété de raffinement est *effective*, dans le sens où l'on peut *définir* les coefficients de la matrice de raffinement (par des "polynômes"—on dit plutôt "termes"—en $+$, $-$, $\wedge$); par suite, la preuve ci-dessus n'utilise pas une once d'axiome du choix.

Un cas important est le cas suivant. Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\Omega)$. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ des applications $f\colon \Omega \to \mathbb{Z}$ *d'image finie* qui sont de plus $\mathcal{B}$-*mesurables*, *i.e.*, telles que pour tout entier n, $f^{-1}[\{n\}] \in \mathcal{B}$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ *est le sous-groupe de* $\mathbb{Z}^\Omega$ *engendré par les fonctions caractéristiques des éléments de* $\mathcal{B}$.

Lemme 11.5. $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ *est un sous-groupe réticulé de* $\mathbb{Z}^\Omega$.

Preuve. Il est immédiat que la fonction nulle appartient à $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ et que pour tout élément f de $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$, $-f$ appartient aussi à $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$. C'est moins évident pour la somme. Soient donc f et g deux éléments de $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$. Il est immédiat que $f+g$ est d'image finie, incluse dans $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$. Le fait que $(f+g)^{-1}[\{n\}] \in \mathcal{B}$ résulte alors immédiatement du fait que

$$(f+g)^{-1}[\{n\}] = \bigcup_{(p,q)\in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} g;\ p+q=n} f^{-1}[\{p\}] \cap g^{-1}[\{q\}]$$

et que la réunion figurant dans le membre de droite est finie. Ainsi, $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}^\Omega$.

Pour conclure, il suffit alors de vérifier que pour tout $f \in \mathbb{Z}[\mathcal{B}]$, $f \vee 0$ appartient aussi à $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$. Il est trivial que $f \vee 0$ est d'image finie. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $n < 0$, alors $(f \vee 0)^{-1}[\{n\}] = \varnothing \in \mathcal{B}$ alors que si $n > 0$, alors $(f \vee 0)^{-1}[\{n\}] = f^{-1}[\{n\}] \in \mathcal{B}$; enfin, $(f \vee 0)^{-1}[\{0\}] = f^{-1}\{0, -1, \dots, -m\} \in \mathcal{B}$ pour tout minorant $-m$ de l'image de f: d'où $f \vee 0 \in \mathbb{Z}[\mathcal{B}]$. Donc $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ est un sous-groupe réticulé de $\mathbb{Z}^\Omega$. $\square$

Dans le contexte du Lemme 11.5, si G est un groupe opérant sur Ω en laissant $\mathcal{B}$ globalement invariant (*i.e.*, $g\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ pour tout $g \in G$—donc aussi $g\mathcal{B} = \mathcal{B}$ en appliquant ceci à g^{-1}), alors G opère également par automorphismes sur $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$, on parle de *l'opération de* G *sur* $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ *par translations*. Elle est définie, pour tout $g \in G$ et tout $\varphi \in \mathbb{Z}[\mathcal{B}]$, par

$$(\forall x \in \Omega)\big((g \cdot \varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)\big)$$

(vérifier que l'égalité $g \cdot (h \cdot \varphi) = (gh) \cdot \varphi$ a bien lieu...!) En particulier, l'image de $g \cdot \varphi$ est égale à l'image de φ. En particulier aussi, pour tout $X \in \mathcal{B}$, $g \cdot \chi_X = \chi_{gX}$. Notons $\mathbb{N}[\mathcal{B}] = \mathbb{Z}[\mathcal{B}]^+$. Nous pouvons alors relier la notion d'équidécomposabilité vue dans l'introduction de ce chapitre et la définition générale des M/G:

Lemme 11.6. *Soit* Ω *un ensemble, soit* $\mathcal{B}$ *une sous-algèbre de Boole de* $\mathfrak{P}(\Omega)$ *et soit* G *un groupe opérant sur* Ω *en laissant* $\mathcal{B}$ *globalement invariant. Alors pour tous éléments* X *et* Y *de* $\mathcal{B}$, $\chi_X \equiv_G \chi_Y$ *si et seulement si il existe un entier naturel* n, *des éléments* g_i $(i < n)$ *de* G *et deux partitions* $X = \bigcup_{i<n} X_i$ *et* $Y = \bigcup_{i<n} g_i X_i$ *avec les* X_i *dans* $\mathcal{B}$ *telles que pour tout* $i < n$, $Y_i = g_i X_i$ *(et nous dirons alors que* X *et* Y *sont* G-équidécomposables avec morceaux dans $\mathcal{B}$*).*

PREUVE. Le fait que $\chi_X \equiv_G \chi_Y$ est équivalent par définition à l'existence d'un entier naturel n et d'éléments g_i $(i < n)$ de G et d'éléments φ_i $(i < n)$ de $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$ tels que

$$\chi_X = \sum_{i<n} \varphi_i \quad \text{et} \quad \chi_Y = \sum_{i<n} g_i \varphi_i.$$

Mais nécessairement, les φ_i prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$, ce sont donc des fonctions caractéristiques d'éléments de $\mathcal{B}$; on trouve alors immédiatement la formulation du Lemme. □

Ainsi, $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ sera appelé le monoïde des types d'équidécomposabilité des éléments de $\mathcal{B}$ modulo G, bien qu'en réalité, ses éléments ne sont pas forcément des classes modulo $\equiv_G$ [de fonctions caractéristiques] d'éléments de $\mathcal{B}$, mais plutôt des *sommes* finies de tels éléments. On peut montrer (Exercice 11.5) que le groupe réticulé $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ ainsi qu'il a été construit ci-dessus est en fait indépendant de la représentation choisie de $\mathcal{B}$ comme algèbre de parties d'un ensemble Ω, mais ceci nécessite plus de travail.

D'autre part, pour pouvoir utiliser le Théorème 11.4, il s'agit de décider quand, pour une algèbre de Boole donnée, le groupe réticulé $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ est σ-complet. Une réponse complète est donnée dans l'exercice 11.6, mais la preuve n'est pas aussi évidente qu'elle le paraît, et nous nous contenterons ici du résultat de démonstration plus simple suivant:

LEMME 11.7. *Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{B}$ une sous-σ-algèbre de $\mathfrak{P}(\Omega)$. Alors $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ est un groupe réticulé σ-complet.*

PREUVE. Il s'agit de démontrer que toute suite majorée d'éléments de $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ admet une borne supérieure; il suffit en fait (quitte à utiliser une translation et à remplacer les éléments par leur borne supérieure avec 0) de supposer que ces éléments sont dans $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$. Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$, majorée par un élément g de $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$. Puisque $\mathbb{Z}^\Omega$ est un groupe réticulé complet, $f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est défini dans $\mathbb{Z}^\Omega$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que f appartient à $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$. D'une part, l'image de g est majorée (car $g \in \mathbb{N}[\mathcal{B}]$), donc l'image de f est *a fortiori* majorée: puisque f est positive, on en déduit que f est d'image finie.

De plus, pour tout entier n, si l'on pose $I_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq n\}$, alors $f^{-1}[I_n] = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} f_m^{-1}[I_n] \in \mathcal{B}$ (car $\mathcal{B}$ est une sous-σ-algèbre de $\mathfrak{P}(\Omega)$), donc $f^{-1}[\{n\}] = f^{-1}[I_n] \setminus f^{-1}[I_{n+1}] \in \mathcal{B}$. Par suite, f est $\mathcal{B}$-mesurable. Donc $f \in \mathbb{N}[\mathcal{B}]$, ce qui permet de conclure. □

COROLLAIRE 11.8. *Soit Ω un ensemble, soit $\mathcal{B}$ une sous-σ-algèbre de $\mathfrak{P}(\Omega)$ et soit G un groupe opérant sur Ω dont les éléments laissent $\mathcal{B}$ globalement invariante. Alors $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ est antisymétrique.*

Si l'on ne suppose pas la σ-complétude de $\mathcal{B}$, alors il existe des contrexemples à l'antisymétrie, *voir* l'Exercice 11.8. De façon générale, la moindre propriété des monoïdes $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ a toujours de fortes chances de faire l'objet d'une démonstration assez compliquée! Voici par exemple une application immédiate du Chapitre 10.

PROPOSITION 11.9. *Soit Ω un ensemble, soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\Omega)$ et soit G un groupe opérant sur Ω en laissant $\mathcal{B}$ globalement invariante. Pour tout $X \in \mathcal{B}$, notons $[X]$ la classe d'équivalence de χ_X modulo $\equiv_G$. Alors pour tout $A \in \mathcal{B}$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe une mesure finiment additive (*voir *Chapitre 1 pour la définition)* $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ *telle que* μ *est* G*-invariante (*i.e.*, pour tout* $X \in \mathcal{B}$ *et tout* $g \in G$, $\mu(gX) = \mu(X)$*) et* $\mu(A) = 1$.

(ii) *Pour tout entier naturel* n, $(n+1)[A] \not\leq n[A]$ *pour le préordre algébrique* $\leq$ *de* $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$.

Preuve. Tout d'abord, comme dans le Chapitre 1, si $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ est une mesure finiment additive, on peut la "prolonger" en un homomorphisme $\bar{\mu}$ de monoïdes de $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$ vers $[0, +\infty]$ en posant, pour tout $s \in \mathbb{N}[\mathcal{B}]$,

$$\bar{\mu}(s) = \int s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} n \cdot \mu\big(s^{-1}[\{n\}]\big).$$

Il est alors immédiat que si μ est G-invariante, alors $\bar{\mu}$ l'est aussi, et donc que pour tous éléments s et t de $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$, si $s \equiv_G t$, alors $\int s \,\mathrm{d}\mu = \int t \,\mathrm{d}\mu$.

Par suite, si μ satisfait (i) et $n \in \mathbb{N}$ satisfait $(n+1)[A] \leq n[A]$, alors $\int (n+1)\chi_A \,\mathrm{d}\mu \leq \int n\chi_A \,\mathrm{d}\mu$, soit $(n+1)\mu(A) \leq n\mu(A)$, soit encore $n+1 \leq n$, contradiction.

Réciproquement, supposons qu'il n'existe pas de mesure finiment additive G-invariante de $\mathcal{B}$ vers $[0, +\infty]$ envoyant A sur 1. Si il existait un homomorphisme de po^+-monoïdes $\varphi\colon \mathbb{N}[\mathcal{B}]/G \to \overline{\mathbb{R}}^+$ (rappelons que $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty]$) envoyant $[A]$ sur 1, alors on obtiendrait une mesure invariante normalisant A en posant naturellement $\mu(X) = \varphi([X])$, contradiction. Par suite, par le Corollaire 10.14, il existe un entier naturel n tel que $(n+1)[A] \leq n[A]$. $\square$

Ce résultat est fascinant, dans le sens où il exprime que "quelque chose existe de toute façon": *soit* une mesure invariante normalisant A, *soit* une décomposition dite "faiblement paradoxale" donnant l'inégalité peu intuitive $(n+1)[A] \leq n[A]$. Bien que beaucoup de choses soient déjà connues à ce sujet, certaines sont de preuve extrêmement difficile, à un tel point que les problèmes correspondants sont restés ouverts pendant une cinquantaine d'années ou plus, malgré de nombreux assauts redoutables. Une bonne référence générale pour ce genre de problème est [**Wago**], mais citons aussi [**Lacz9**] qui contient des résultats plus récents. Citons-en quelques-uns, sans preuve. L'un des plus anciens, le plus célèbre, pourtant l'un des moins intuitifs, mais cependant l'un des plus faciles, est le suivant, le *paradoxe de Banach-Tarski*, [**BaTa**]. *Voir* aussi [**Wago**], et l'Exercice 11.10, où une preuve est indiquée:

Théorème (Banach et Tarski, 1924). *Faisons opérer le groupe* SO_3 *des rotations vectorielles de l'espace euclidien de dimension* 3 *sur sa sphère unité* S^2. *Alors, dans* $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(S^2)]/SO_3$, S^2 *est* paradoxal, i.e., $[S^2] = 2[S^2]$.

Signalons que le nombre minimum de morceaux pour réaliser une telle décomposition est égal à 4 (*voir* [**Wago**]).

Il est clair que le morceaux utilisés dans la "décomposition paradoxale de la sphère" de Banach-Tarski ne peuvent pas être mesurables pour la mesure de Lebesgue de S^2. Par contre, la question resta ouverte pendant plus de 60 ans si ces morceaux pouvaient avoir la *propriété de Baire* (une partie X d'un espace topologique a la propriété de Baire quand il existe un ouvert U tel que $X \triangle U$ soit *maigre*, *voir* aussi par exemple l'Exercice 1.29). Incroyablement, la réponse est *positive*, et c'est l'un des résultats les plus difficiles et techniques jamais démontrés dans ce domaine, *voir* [**DoFo1**] pour un résumé et [**DoFo2**] pour des preuves complètes:

THÉORÈME (Dougherty et Foreman, 1992). *Faisons opérer le groupe SO_3 des rotations vectorielles de l'espace euclidien de dimension 3 sur sa sphère unité S^2 et soit $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole des parties de S^2 qui ont la propriété de Baire. Alors, dans $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/SO_3$, S^2 est* paradoxal, i.e., $[S^2] = 2[S^2]$.

Signalons que le nombre minimum de morceaux pour réaliser une telle décomposition est égal à 6 (*voir* [**Wehr7**]).

Signalons également qu'en fait, les deux énoncés ci-dessus ne sont que des cas particuliers d'énoncés beaucoup plus généraux.

Dans un autre ordre d'idées, citons la solution positive du problème de la "quadrature géométrique du cercle" de Tarski, qui resta lui aussi ouvert pendant plus de 60 ans et dont la solution est également très difficile, *voir* [**Lacz2**] (améliorations dans [**Lacz4**]).

THÉORÈME (Laczkovich, 1990). *Soit $G = \mathbb{R}^2$, opérant par translations sur $\mathbb{R}^2$. Alors le disque et le carré de $\mathbb{R}^2$ d'aire unité sont G-équidécomposables.*

Le nombre minimum de morceaux à utiliser pour une telle décomposition n'est pas connu; la méthode de [**Lacz4**] donne au plus 10^{40} morceaux, mais il n'est même pas connu si, par exemple, 10 morceaux suffisent...

Par ailleurs, le problème de savoir si les morceaux peuvent être tous mesurables, ou tous avec la propriété de Baire, ou même tous boréliens, et encore ouvert.

Citons également des résultats moins difficiles que les deux derniers ci-dessus mais néanmoins intéressants (la preuve du paradoxe de Banach-Tarski n'est pas difficile), *Voir* [**Wehr8**] où une preuve du résultat suivant, dûe essentiellement à M. Laczkovich, est présentée (historiquement, l'origine exacte du résultat ne me paraît pas claire):

THÉORÈME (essentiellement König). *Soit G un groupe opérant sur un ensemble Ω. Alors $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$ est non perforé.*

La preuve de ce résultat est plus délicate que celle de l'antisymétrie du Théorème 11.4. Elle utilise de façon essentielle le théorème de Tychonoff, plus précisément la version infinie du Lemme des mariages (*voir* Exercice 1.22, ou remonter à la source avec [**Hall**]). Par ailleurs, on ne peut remplacer $\mathfrak{P}(\Omega)$ par une algèbre de Boole complète quelconque, *voir* [**Truss3**]:

THÉORÈME (Truss, 1990). *Soit $\mathbf{B}$ l'algèbre de Boole des ouverts réguliers de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Alors il existe un groupe G d'automorphismes de $\mathbf{B}$ tel que $\mathbb{N}[\mathbf{B}]/G$ soit 2-perforé; en fait, il existe deux éléments a et b de $\mathbb{N}[\mathbf{B}]/G$ tels que $2a = 2b$ mais $a \neq b$.*

Truss montre que son exemple ne satisfait pas non plus la propriété de pseudo-simplification vue dans le Chapitre 10.

Il n'en reste pas moins qu'après que l'on ait démontré l'antisymétrie et la non-perforation pour les $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$, aucune nouvelle propriété *universelle* (*i.e.*, du type $(\forall\vec{x})\varphi(\vec{x})$ où φ est une formule sans quantificateurs de $(+, \leq)$ et $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une liste de symboles de variable—notons que la propriété de raffinement n'est *pas* une telle propriété) ne vint se manifester pour ces espaces. Il en existe cependant une, qui n'est pas conséquence de l'antisymétrie et de la non perforation, mais elle

est totalement triviale, c'est la conjonction des deux énoncés suivants:

$$(\forall x, y, u, v)\big((x + u \leq y + u \text{ et } u \leq v) \Rightarrow x + v \leq y + v\big),$$
$$(\forall x, y, u, v)\big((x + u = y + u \text{ et } u \leq v) \Rightarrow x + v = y + v\big).$$

voir l'Exercice 10.21. Elle résulte immédiatement du fait que l'on prend le préordre *algébrique* sur $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$, appelons-la donc la *préalgébricité*. Cela dit, reste-t-il d'autres propriétés universelles des $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$ que nous n'aurions pas vues? La réponse est définitivement non—*i.e.*, il n'y a essentiellement pas d'autres axiomes universels satisfaits par tous les $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$, *voir* [**Wehr8**]:

Théorème (Wehrung, 1994). *Un* po$^+$*-monoïde se plonge dans un* $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$ *si et seulement si il est antisymétrique, non perforé et préalgébrique.*

La construction est plutôt longue, et étudie plus les *po*$^+$-monoïdes que les $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$. Elle utilise, vers la fin de la preuve et de façon cruciale, une construction de Laczkovich sur les $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]/G$.

Un énoncé à rapprocher (formellement) de celui-ci est le résultat (très difficile) suivant, *voir* [**Keto**]:

Théorème (Ketonen, 1978). *Soit BA le semi-groupe commutatif des types d'isomorphisme d'algèbres de Boole dénombrables. Alors tout semi-groupe commutatif dénombrable se plonge dans BA.*

Nous avons dit précédemment que la théorie universelle des monoïdes de types d'équidécomposabilité était complètement déterminé (elle est de fait *décidable* par un autre résultat de [**Wehr8**]) dans le cas des algèbres de Boole complètes atomiques (*i.e.*, de type $\mathfrak{P}(\Omega)$ où Ω est un ensemble). Par contre, en ce qui concerne la théorie sans restriction sur la complexité des formules, pratiquement rien n'est connu. Nous avons déjà vu que les $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ satisfaisaient tous la propriété de raffinement, mais y a-t-il d'autres axiomes qui ne se déduisent pas de la propriété de raffinement? La réponse est, pour les algèbres de Boole σ-complètes, *positive* (avec une preuve non triviale), *voir* [**Tars2**, Theorem 11.12]:

Théorème (Tarski, 1949). *Soit G un groupe opérant par automorphismes sur une algèbre de Boole σ-complète $\mathcal{B}$. Alors* $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ *est une* algèbre de raffinement*,* i.e.*, il satisfait la propriété de raffinement et l'axiome suivant:*

$$(\forall a_0, a_1, b, c)\Bigg[a_0 + a_1 + c = b + c \Longrightarrow$$
$$(\exists_{i<2} b_i, c_i)\Bigg(\bigwedge_{i<2}(a_i + c_i = b_i + c_i) \text{ et } b_0 + b_1 = b \text{ et } c_0 + c_1 = c\Bigg)\Bigg].$$

Il en résulte en particulier que si $\mathcal{B}$ est σ-complète, alors $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ (muni de son préordre—qui est ici un ordre—algébrique) satisfait l'axiome PVI de l'Exercice 10.7, donc, d'après le résultat de l'Exercice 10.8, $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ *satisfait la propriété d'interpolation finie*. D'autres structures très différentes qui sont également des algèbres de raffinement peuvent être trouvées dans [**Wehr13**].

On peut aussi rechercher quels axiomes universels sont satisfaits par les $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ quand on impose des restrictions sur le groupe G. Par exemple, on dit que G est *exponentiellement borné* quand pour toute partie finie S de G, l'application f_S de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ définie par $f_S(n)$ =(nombre d'éléments de G qui sont produits de n

éléments de S) vérifie $\lim_{n\to+\infty} f_S(n)/2^n = 0$. En particulier, *tout groupe abélien est exponentiellement borné.* A. Tarski a alors démontré le résultat non-trivial suivant, *voir* [**Tars2**, Theorem 16.10]:

THÉORÈME (Tarski, 1949). *Soit G un groupe exponentiellement borné opérant par automorphismes sur une algèbre de Boole $\mathcal{B}$. Alors $\mathbb{N}[\mathcal{B}]/G$ satisfait l'axiome suivant:*

$$(\forall a, b, c)(a + 2c = b + c \Longrightarrow a + c = b).$$

Plus proche des problèmes de décomposition avec des objets "courants" est la solution suivante du troisième problème de Hilbert (par Dehn; *voir* [**Bolt**] pour une exposition très claire sur ce sujet):

THÉORÈME (Dehn). *Considérons $\Omega = \mathbb{R}^3$ muni du groupe des isométries affines. Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole quotient de l'algèbre de Boole engendrée par les polyèdres de $\mathbb{R}^3$ par les éléments inclus dans une réunion finie de plans affines (*i.e.*, les figures au plus bidimensionnelles). Alors un cube et un tétraèdre régulier ne sont jamais équidécomposables.*

Il est à noter que le cube est équidécomposable à certains tétraèdres *non réguliers*, ce qui n'est pas du tout évident *a priori*. En dimension 3, le volume et *l'invariant de Dehn* (ce dernier n'est pas un nombre réel mais un élément du produit tensoriel $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$) forment un ensemble complet d'invariants pour "l'équidécomposabilité polyédrale". Plus généralement, en dimension n, on associe à tout polytope (réunion finie de polyèdres) P ses *invariants de Dehn-Hadwiger* $D_i(P)$ $(0 \le i \le [(n-1)/2]$, où $x \mapsto [x]$ est la fonction partie entière—$D_0(P)$ est le volume de P) qui sont des éléments du produit tensoriel

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} ((\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$$

(i facteurs $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$), et ce sont des invariants d'équidécomposabilité. Le problème de savoir si ces invariants forment un système complet pour l'équidécomposabilité des polytopes est résolu (avec une réponse positive) en dimension 3 et en dimension 4, *voir* [**Cart**], mais à ma connaissance, on ne sait encore rien au-delà.

Exercices du Chapitre 11

EXERCICE 11.1. Soit M un monoïde commutatif. Un *idéal* de M est, par définition, un sous-monoïde N de M satisfaisant

$$(\forall x, y \in M)\big(x + y \in N \Rightarrow (x \in N \text{ et } y \in N)\big).$$

On définit alors une relation binaire $\sim_N$ sur M en posant

$$x \sim_N y \Longleftrightarrow (\exists u, v \in N)(x + u = y + v).$$

(a) Montrer que $\sim$ est une congruence sur M.
(b) Montrer que si M est un monoïde de raffinement, alors $M/\sim_N$ est un monoïde de raffinement.

EXERCICE 11.2. Soit M un monoïde commutatif et soit $\to$ une relation binaire sur M. On suppose que $\to$ satisfait les conditions suivantes:

(i) $(\forall x \in M)(\exists y \in M)(x \to y)$;
(ii) $\to$ est transitive;

(iii) $\to$ est *confluente*, *i.e.*, pour tous a, b, et c dans M, si $a \to b$ et $a \to c$, alors il existe $x \in M$ tel que $b \to x$ et $c \to x$;
(iv) $\to$ et sa relation opposée $\leftarrow$ (définie par $a \leftarrow b \Leftrightarrow b \to a$) sont raffinantes.

Soit $\approx$ la relation binaire sur M définie par

$$x \approx y \Leftrightarrow (\exists z)(x \to z \text{ et } y \to z).$$

(a) Montrer que $\approx$ est une relation d'équivalence sur M.
(b) Montrer que $\approx$ est raffinante.
(c) Montrer que la congruence $\equiv$ engendrée par $\to$ est la même que la congruence engendrée par $\approx$; en déduire que si M est un monoïde de raffinement, alors $\equiv$ est raffinante.
(d) Soit M un monoïde commutatif. On définit une application $s\colon M^{\mathbb{N}} \to M^{\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$,

$$s\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Montrer que s est un endomorphisme du monoïde $M^{\mathbb{N}}$.
(e) On définit une relation binaire $\to$ sur $M^{\mathbb{N}}$ par $\xi \to \eta$ si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $\eta = s^n(\xi)$. Montrer que $\to$ satisfait les conditions de (i) à (iv) ci-dessus.
(f) En déduire que si M est un monoïde de raffinement, et que si l'on note $\equiv$ la congruence engendrée par $\to$, alors $M^{\mathbb{N}}/\equiv$ est un monoïde de raffinement.

Exercice 11.3. Soit G un groupe opérant par automorphismes sur un monoïde commutatif M et soit H un sous-groupe distingué de G.

(a) Montrer que le groupe G/H opère naturellement par automorphismes sur M/H.
(b) Montrer que si M est un monoïde de raffinement, alors il existe un isomorphisme de monoïdes de M/G sur $(M/H)/(G/H)$.

Exercice 11.4. Soit M un monoïde de raffinement et soit S un semi-groupe opérant sur M par endomorphismes de monoïdes (*i.e.*, pour tout $s \in S$, l'application $x \mapsto s \cdot x$ est un endomorphisme de M). On suppose que S satisfait la *condition d'Ore* (à gauche) suivante (*voir* à ce sujet l'Exercice 5.15):

$$(\forall p, q \in S)(\exists u, v \in S)(up = vq).$$

Noter que si S est un groupe ou bien un semi-groupe commutatif, alors il satisfait la condition d'Ore à gauche. On définit une relation binaire $\to$ sur M en posant

$$x \to y \Longleftrightarrow (\exists s \in S)(s \cdot x = y).$$

(a) Quelle condition faut-il imposer à l'opération de S sur M pour que les conditions de (i) à (iv) de l'Exercice 11.2 soient satisfaites?
(b) Montrer que la condition trouvée en (a) résulte de la condition suivante: pour tout $s \in S$ et tous a, b, et c dans M, si $s \cdot c = a + b$, alors il existe deux éléments a' et b' de S tels que $c = a' + b'$ et $s \cdot a' = a$ et $s \cdot b' = b$.
(c) Montrer que cette dernière condition est satisfaite par $M^{\mathbb{N}}$ dans le contexte des questions (d) à (f) de l'Exercice 11.2.

Exercice 11.5. Soit Ω un ensemble et soit $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\Omega)$. Si M est un monoïde commutatif, une *charge* sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans M est

une application $\mu\colon \mathcal{B} \to M$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et pour tous éléments disjoints X et Y de $\mathcal{B}$, $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$. Pour tout $f \in \mathbb{N}[\mathcal{B}]$, on pose alors

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\big(\{x \in \Omega \mid f(x) \geq n\}\big)$$

(noter que tous les termes du membre de droite sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux).

(a) Montrer que si $f = \sum_{i<k} n_i \chi_{X_i}$ (où pour tout $i < k$, $n_i \in \mathbb{N}$ et $X_i \in \mathcal{B}$), alors

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i<k} n_i \mu(X_i).$$

(b) En déduire que $f \mapsto \int f \,\mathrm{d}\mu$ est un homomorphisme de monoïdes de $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$ vers M.

(c) En déduire que $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$ possède la "propriété universelle" suivante: pour tout monoïde commutatif M et toute charge $\mu\colon \mathcal{B} \to M$, il existe un seul homomorphisme de monoïdes $\bar{\mu}\colon \mathbb{N}[\mathcal{B}] \to M$ tel que

$$(\forall X \in \mathcal{B})\big(\bar{\mu}(\chi_X) = \mu(X)\big).$$

(d) En déduire que tout monoïde commutatif possédant la propriété universelle ci-dessus est isomorphe à $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$.

(e) Soit B une algèbre de Boole. En essayant de représenter $\sum_{X \in B} n_X \chi_X$ par l'application $X \mapsto n_X$, construire indépendamment de toute représentation de B comme algèbre de parties un monoïde commutatif $\mathbb{N}[\mathcal{B}]$ qui est le cône positif d'un groupe abélien réticulé et qui possède les propriétés vues dans les questions précédentes. (***Avertissement:*** cette question n'est pas difficile, mais très fastidieuse).

Exercice 11.6. * Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ est un groupe réticulé σ-complet (resp., complet) si et seulement si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole σ-complète (resp., complète).

Exercice 11.7. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui sont de la forme $U \triangle D$ où U est une réunion *finie* d'intervalles et D est une partie [au plus] dénombrable de $\mathbb{R}$. Soit de plus G le groupe des *translations* de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, laissée globalement invariante par chaque élément de G.

Par définition, une *translation par morceaux* sur $\mathcal{B}$ est une fonction $\tau\colon X \to \mathbb{R}$ *injective* où X est un élément de $\mathcal{B}$ qui peut s'écrire comme une réunion disjointe $\bigcup_{i<n} X_i$ ($X_i \in \mathcal{B}$) et chaque restriction $\tau\restriction_{X_i}$ est une translation. De plus, pour tout nombre réel x, notons $[x]$ la partie entière de x et $\langle x \rangle = x - [x]$. Soit α un nombre irrationnel compris entre 0 et 1.

(b) Montrer que l'application $\tau\colon [0, 1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle x + \alpha \rangle$ est une translation par morceaux sur $\mathcal{B}$, qui définit une bijection de $[0, 1[$ sur $[0, 1[$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\tau^n(0) = \langle n\alpha \rangle$.

Posons alors $D = \{\langle n\alpha \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(d) Montrer que $\tau[D] = D \setminus \{0\}$.

(e) En écrivant que $[0, 1[= ([0, 1[\setminus D) \cup D$ et $]0, 1[= ([0, 1[\setminus D) \cup \tau D$, montrer que $[0, 1[$ et $]0, 1[$ sont G-équidécomposables à morceaux dans $\mathcal{B}$.

(f) Montrer que deux réunions finies d'intervalles *bornés* de $\mathbb{R}$ sont G-équidécomposables si et seulement si elles ont même longueur.
(g) En adaptant le raisonnement de (e), montrer que pour tout intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ et toute partie dénombrable D de I, I et $I \setminus D$ sont équidécomposables à morceaux dans $\mathcal{B}$ (***Indication:*** montrer que l'on peut choisir α tel que pour tout entier naturel $n \neq 0$, $\tau^n[D] \cap D = \varnothing$).
(h) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que deux éléments bornés U et V de $\mathcal{B}$ sont G-équidécomposables (avec des morceaux dans $\mathcal{B}$) si et seulement si $\lambda(U) = \lambda(V)$.
(i) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$ ne sont pas G-équidécomposables avec morceaux dans $\mathcal{B}$.

Exercice 11.8. * Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ et soit G le groupe des homothéties-translations de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, laissée globalement invariante par chaque élément de G.

Pour tout intervalle borné I de $\mathbb{R}$, on définit un entier relatif $c(I)$ en posant

$$c(I) = \begin{cases} -1 & \text{si } I \text{ est un intervalle ouvert,} \\ 0 & \text{si } I = \varnothing \text{ ou } I \text{ est un intervalle semi-ouvert,} \\ +1 & \text{si } I \text{ est un intervalle fermé.} \end{cases}$$

(b) Montrer que si un intervalle borné K est réunion disjointe de deux intervalles I et J, alors $c(K) = c(I) + c(J)$.
(c) Montrer que si I est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et si $(I_k)_{k<n}$ est une suite finie *disjointe* d'intervalles de $\mathbb{R}$ dont la réunion est égale à I, alors $c(I) = \sum_{k<n} c(I_k)$.
(d) En déduire que pour tout élément U de l'ensemble $\mathcal{I}$ des éléments *bornés* de $\mathcal{B}$, on peut définir un entier relatif $c(U)$ en posant, pour *toute* décomposition $U = \bigcup_{k<n} I_k$ en réunion disjointe d'intervalles de $\mathbb{R}$, $c(U) = \sum_{k<n} c(I_k)$.
(e) Montrer que c est une *charge* sur $\mathcal{I}$, *i.e.*, pour deux éléments quelconques *disjoints* U et V de $\mathcal{I}$, $c(U \cup V) = c(U) + c(V)$.
(f) Montrer que si U et V sont deux éléments G-équidécomposables à morceaux dans $\mathcal{B}$ de $\mathcal{I}$, alors $U \equiv_G V$ entraîne que $c(U) = c(V)$.
(g) En déduire qu'un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ n'est jamais G-équidécomposable à morceaux dans $\mathcal{B}$ à un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
(h) Soit a (resp., b) le type d'équidécomposabilité de $[0, 1]$ (resp., $]0, 1[$). Montrer que $a \leq b$ et $b \leq a$, mais que $a \neq b$.

Exercice 11.9. Faisons opérer le groupe additif des nombres *rationnels* $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$ par translations. Posons $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

(a) Soit μ une mesure finiment additive de $\mathfrak{P}(\mathbb{Q})$ vers $[0, +\infty]$ qui est de plus $\mathbb{Q}$-invariante (*i.e.*, $\mu(r+X) = \mu(X)$ pour tout rationnel r et tout $X \subseteq \mathbb{Q}$). Montrer que pour toute partie finie X de $\mathbb{Q}$, $\mu(X) = |X| \cdot \mu(\{0\})$ (où $|X|$ est le cardinal de X).
(b) Montrer que pour toute mesure $\mathbb{Q}$-invariante $\mu\colon \mathfrak{P}(\mathbb{Q}) \to [0, +\infty]$, $\mu(A) = \mu(B)$.

Disons qu'une *translation par morceaux* est une application *injective* τ d'une partie X de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}$ telle qu'il existe une partie *finie* $\{r_1, \ldots, r_n\}$ de $\mathbb{Q}$ (dont les éléments seront appelés les *vecteurs* de τ) telle que

$$(\forall x \in X)\big(\tau(x) \in \{r_1 + x, \ldots, r_n + x\}\big).$$

Pour tout $X \subseteq \mathbb{Q}$, notons $[X]$ la classe d'équidécomposabilité modulo $\mathbb{Q}$ de χ_X.

(c) Montrer que si U et V sont deux parties de $\mathbb{Q}$, alors $[U] \leq [V]$ si et seulement si il existe une translation par morceaux de X dans Y.

(d) Soit τ une translation par morceaux, de vecteurs $r_1, \ldots, r_n$ et soit d un entier naturel non nul tel que $dr_1, \ldots, dr_n$ soient entiers. Montrer que τ laisse $(1/d)\mathbb{Z}$ globalement invariant.

(e) Montrer que $[A] \not\leq [B]$.

Ainsi, dans cet exemple, *les mesures invariantes à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *ne séparent pas les classes d'équidécomposabilité des parties de* $\mathbb{Q}$. Une autre propriété négative se trouve dans la question suivante:

(f) Soit $C = \{0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n[C] \leq [B]$ mais que $[C]+[B] \neq [B]$.

Exercice 11.10. Le but de cet exercice est d'indiquer une preuve du théorème de Banach-Tarski (elle vient essentiellement de [**Wago**]). De façon générale, disons que si un groupe G opère sur un ensemble Ω, un sous-ensemble X de Ω est *G-paradoxal* quand, dans $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\Omega)]$, $\chi_X \equiv_G 2\chi_X$. Notons $[X]$ la classe d'équivalence modulo $\equiv_G$ de χ_X. Nous noterons également $\sqcup$ la réunion *disjointe*—par exemple, $c = a \sqcup b$ signifie que $c = a \cup b$ et $a \cap b = \varnothing$.

(a) Soit F_2 le groupe libre à deux générateurs, disons a et b. Faisons opérer F_2 sur lui-même par translations à gauche (*i.e.*, pour tous g et x dans F_2, $g \cdot x = gx$). Pour tout $u \in F_2$, notons $W(u)$ l'ensemble des éléments de F_2 qui, sous forme réduite, commencent par u. Montrer que

$$\begin{aligned} F_2 \setminus \{1\} &= W(a) \sqcup W(a^{-1}) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1}); \\ F_2 &= W(a) \sqcup aW(a^{-1}) \\ &= W(b) \sqcup bW(b^{-1}); \end{aligned}$$

(b) En déduire (en utilisant s'il le faut l'antisymétrie!) que F_2 est paradoxal (pour son action sur lui-même par translations à gauche).

(c) Soit G un groupe opérant sur un ensemble Ω. Montrer que si G opère *simplement* (*i.e.*, $g \cdot x = x$ entraîne $g = 1$) sur Ω et si G est paradoxal pour son opération à gauche sur lui-même, alors Ω est G-paradoxal ("imiter" la décomposition paradoxale de G sur chacune de ses orbites).

Munissons maintenant $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne naturelle. Soient α et β les endomorphismes (vectoriels) de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(d) Vérifier que α et β sont des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$.

(e) Soit G le sous-groupe de SO_3 engendré par $\{\alpha, \beta\}$ et soit $e\colon F_2 \to G$ l'homomorphisme surjectif envoyant a sur α et b sur β. Soit w un élément non trivial de F_2, se terminant (sous sa forme réduite) par $a^{\pm 1}$. Montrer par récurrence sur la longueur de w que $e(w)(1,0,0)$ peut s'écrire sous la forme $(p, q\sqrt{2}, r)/3^k$ où p, q, r sont des entiers relatifs, k est un entier naturel et q n'est pas un multiple de 3.

(f) En remarquant que la conjugaison n'affecte pas le fait d'être ou non égal à 1, en déduire que e est un *isomorphisme*, donc que F_2 se plonge dans SO_3.

(g) Soit $D = \{x \in S^2 \mid (\exists g \in G \setminus \{1\})(gx = x)\}$. Montrer que D est dénombrable, et que $S^2 \setminus D$ est G-paradoxal.

(h) Montrer qu'il existe un élément ρ de SO_3 tel que pour tout entier naturel non nul n, $\rho^n[D] \cap D = \varnothing$ (commencer par prendre une rotation dont l'axe évite D).
(i) Posons $\bar{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho^n[D]$. En écrivant que $S^2 = (S^2 \setminus \bar{D}) \sqcup \bar{D}$ et $S^2 \setminus D = (S^2 \setminus \bar{D}) \sqcup \rho[\bar{D}]$, en déduire que S^2 et $S^2 \setminus D$ sont équidécomposables. Conclure que S^2 est SO_3-paradoxal.

Exercice 11.11. Le but de cet exercice est de montrer entre autres que *pour $n \geq 3$, deux parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ sont toujours équidécomposables modulo le groupe des rotations affines.* On admettra tout d'abord le résultat de l'Exercice 11.10. Soit G le groupe des rotations affines de $\mathbb{R}^n$. Pour toute partie X de $\mathbb{R}^n$, notons $[X]$ la classe d'équidécomposabilité de χ_X modulo G.

Dans un premier temps, on supposera que $n = 3$.

(a) Soit B une boule ouverte non vide de $\mathbb{R}^3$ et soit p un point de B. Montrer que $[B] = [B \setminus \{p\}]$ (considérer une rotation affine dont l'axe rencontre B mais ne passe pas par p, puis s'inspirer de (h), (i) de l'Exercice 11.10).
(b) En déduire que pour toute boule non triviale B de $\mathbb{R}^3$ et tout point p de B, $[B] = [B \setminus \{p\}]$.
(c) Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$. En utilisant le résultat de l'Exercice 11.10, montrer que $[B\setminus\{0\}] = 2[B\setminus\{0\}]$ (propager le long des rayons une décomposition paradoxale de la sphère).
(d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel non nul m, $[B] = m[B]$.
(e) En déduire que pour toute partie bornée X de $\mathbb{R}^3$, $[X] \leq [B]$, puis que deux parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables.

Supposons à présent que n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 3.

(f) Soit $C_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n \mid \max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq 1\}$. Montrer que $[C_n] = 2[C_n]$ (on pourra raisonner par récurrence sur n).
(g) En déduire que pour toute partie bornée X de $\mathbb{R}^n$, $[X] \leq [C_n]$, et que deux parties bornées d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ sont toujours équidécomposables.

L'exercice suivant montre que la situation est radicalement changée pour les petites dimensions (1 et 2).

Exercice 11.12. * Soit n un élément de $\{1, 2\}$ et soit G le groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^n$.

(a) En admettant le résultat de l'Exercice 1.28(d), montrer qu'il existe une mesure de probabilité finiment additive G-invariante $\mu\colon \mathfrak{P}(G) \to [0, 1]$.
(b) Soit F l'espace des applications bornées et à support borné de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, et soit E l'espace des éléments *mesurables* (au sens de Lebesgue) de F. On munit E de la semi-norme définie par

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

puis on munit F de l'application $f \mapsto \|f\|$ définie par

$$\|f\| = \bigwedge\{\|g\| \mid g \in E \text{ et } |f| \leq g\}.$$

Montrer que cette dernière application est bien une semi-norme sur F, prolongeant celle de E.

(c) Soit alors

$$\varphi\colon E \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que φ est une forme linéaire positive 1-Lipschitzienne sur E, puis montrer (en utilisant le Théorème de Hahn-Banach) que φ se prolonge en une forme linéaire 1-Lipschitzienne sur F; nous noterons celle-ci ψ. Montrer que ψ est positive (si $0 \leq f \leq 1$, considérer f et $1 - f$).

(d) Montrer que l'on peut définir, pour tout élément f de F,

$$\theta(f) = \int_G \psi(g \cdot f)\,\mathrm{d}\mu(g)$$

(G opère sur F par translations). Montrer que θ est une forme linéaire 1-Lipschitzienne positive G-invariante sur F prolongeant φ.

(e) Montrer que si X et Y sont deux parties bornées équidécomposables de $\mathbb{R}^n$, alors $\theta(\chi_X) = \theta(\chi_Y)$. En déduire que si X et Y sont deux parties mesurables bornées équidécomposables de $\mathbb{R}^n$, alors X et Y ont même mesure. En particulier, la boule unité de $\mathbb{R}^n$ n'est pas G-paradoxale.

Exercice 11.13.

(a) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties I de $\mathbb{N}$ telles que I et $\mathbb{N} \setminus I$ soient infinies. Montrer que pour tous éléments I et J de $\mathcal{S}$, il existe une permutation de $\mathbb{N}$ envoyant I sur J.

(b) Soit G le groupe des permutations de $\mathbb{N}$, opérant naturellement sur $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{N}$ est paradoxal modulo G, *c.à.d.* que dans $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\mathbb{N})]$, $\chi_{\mathbb{N}} \equiv_G 2\chi_{\mathbb{N}}$. (***Indication:*** observer que

$$\mathbb{N} = (4\mathbb{N}) \cup (1 + 4\mathbb{N}) \cup (2 + 4\mathbb{N}) \cup (3 + 4\mathbb{N})$$

et que

$$\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (1 + 2\mathbb{N})$$

et utiliser le (a)).

(c) Montrer que $\mathbb{N}[\mathfrak{P}(\mathbb{N})]/G$ est isomorphe à $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Exercice 11.14. Soit G le groupe des homothéties-translations de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}$ la sous-algèbre de Boole de $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^2)$ engendrée par les polygones convexes de $\mathbb{R}^2$ (par "polygone convexe", on peut par exemple entendre toute intersection finie bornée de demi-plans fermés). Montrer que deux polygones convexes non triviaux quelconques de $\mathbb{R}^2$ sont G-équidécomposables à morceaux dans $\mathcal{B}$.

Exercice 11.15. Soit A un groupe abélien réticulé et soit G un groupe *fini* opérant par automorphismes sur A. Soit $\pi\colon A^+ \to A^+/G$ l'homomorphisme surjectif naturel, et munissons A^+ et A^+/G de leur préordre algébrique.

(a) Montrer que pour tous éléments a et b de A^+, $\pi(a) \leq \pi(b)$ (resp., $\pi(a) = \pi(b)$) si et seulement si $\sum_{g\in G} ga \leq \sum_{g\in G} gb$ (resp., $\sum_{g\in G} ga = \sum_{g\in G} gb$). (***Indication:*** si par exemple $\sum_{g\in G} ga = \sum_{g\in G} gb$, on cherche des éléments x_g de A^+ tels que $a = \sum_{g\in G} x_g$ et $b = \sum_{g\in G} gx_g$. Prendre "le plus grand x_1 possible", en l'occurrence $a \wedge b$, puis continuer avec $a - a \wedge b$, $b - a \wedge b$ et les éléments de $G \setminus \{1\}\ldots$)

(b) En déduire que A^+/G est le cône positif d'un groupe abélien réticulé.

(c) On dit qu'un groupe G est *localement fini* quand tout sous-groupe finiment engendré de G est fini. Montrer que si A est un groupe abélien réticulé et si G est un groupe localement fini opérant sur A par automorphismes, alors A^+/G est le cône positif d'un groupe de dimension.

Examen de Janvier 1995

Durée: 4 heures
Documents autorisés: cours + polycopié

Le but de ce problème est de caractériser le groupe abélien réticulé libre à n générateurs, où n est un entier naturel fixé. Pour résoudre une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes.

On rappelle que si E est un espace vectoriel sur un corps K qui est soit $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ et si C est un sous-ensemble de E, C est convexe *quand pour tous éléments x et y de C et tout $\lambda \in K$ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$. Si X est un sous-ensemble de E,* l'enveloppe convexe *de X est la plus petite partie convexe de E contenant X; c'est donc l'ensemble des "combinaisons convexes" d'éléments de X,* i.e., *les éléments de E de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où n est un entier naturel, les λ_i sont des éléments de K^+ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et les x_i sont des éléments de X.*

Ière partie. *(premier préliminaire)* Soit K l'un des deux corps $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Un *système linéaire positif* à coefficients dans K est, par définition, un ensemble fini d'équations et d'inéquations dont chacune est de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i = \alpha$$

ou bien

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i \geq \alpha,$$

α et les λ_i étant des éléments de K. Les $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sont les *inconnues* du système.

(1) Soient m et n deux entiers naturels et soient a_i $(1 \leq i \leq m)$ et b_j $(1 \leq j \leq n)$ des éléments de K. Montrer que le système linéaire à une inconnue $\mathbf{x}$ suivant

$$\begin{cases} a_i \leq \mathbf{x} & (\text{tout } i \in \{1, \ldots, m\}) \\ \mathbf{x} \leq b_j & (\text{tout } j \in \{1, \ldots, n\}) \end{cases}$$

admet une solution dans K si et seulement si pour tous i et j (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$), $a_i \leq b_j$.

(2) En "éliminant" l'inconnue $\mathbf{x}_n$, montrer que pour tout système linéaire positif à n inconnues $\Sigma(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$, il existe un système linéaire positif à $n-1$ inconnues $\Sigma'(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ équivalent (dans K^{n-1}) à $(\exists \mathbf{x}_n)\Sigma(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$.

(3) En déduire que si $\Sigma(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ est un système linéaire positif à n inconnues et à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors $\Sigma(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ admet une solution dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il admet une solution dans $\mathbb{Q}^n$.

IIème partie. *(second préliminaire)* Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et soit K un compact convexe non vide de E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$d(x, K) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in K\}.$$

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $B(K, \varepsilon) = \{x \in E \mid d(x, K) < \varepsilon\}$ est un ouvert convexe de E (on pourra montrer que si λ est un nombre réel tel que $0 \leq \lambda \leq 1$ et si x et y sont des éléments de E, $d((1-\lambda)x+\lambda y, K) \leq (1-\lambda)d(x, K) + \lambda d(y, K)$).

(2) Supposons que de plus, $0 \notin K$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $(\forall x \in K)\big(f(x) > 0\big)$ (on pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique).

(3) Soit n un entier naturel, soit X une partie *finie* de $\mathbb{Q}^n$. On note K l'enveloppe convexe de X dans $\mathbb{Q}^n$ et $\overline{K}$ l'enveloppe convexe de X dans $\mathbb{R}^n$.

(3.1) Montrer que $\overline{K} \cap \mathbb{Q}^n = K$. (On pourra utiliser le résultat de la Ière partie).

(3.2) Montrer que si $0 \notin K$, alors il existe une forme linéaire f sur $\mathbb{Q}^n$ et $\alpha > 0$ dans $\mathbb{Q}$ tels que $(\forall x \in K)\big(f(x) > \alpha\big)$ (***Indication:*** déduire de la question précédente l'analogue de ce résultat pour $\mathbb{R}^n$; puis remarquer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

IIIème partie.

(1) Soit G un groupe réticulé et soit S un sous-semi-groupe de $(G, +)$. Notons $\overline{S}$ l'ensemble des éléments de G de la forme $\bigwedge_{i=1}^n g_i = g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$ où n est un entier naturel non nul et les g_i sont des éléments de S. Montrer que $\overline{S}$ est un sous semi-groupe de $(G, +)$, contenant S et stable par $\wedge$.

(2) Dans le contexte de la question (1) ci-dessus, on suppose qu'en outre G est *abélien*. Montrer que le sous-groupe réticulé de G engendré par S (*i.e.* le plus petit—au sens de l'inclusion—sous-groupe réticulé de G contenant S) est égal à $\overline{S} + (-\overline{S})$, *c.à.d.* l'ensemble des éléments de G de la forme $g - h$ où g et h sont des éléments de $\overline{S}$.

On fixe désormais un entier naturel n, et on note $\mathbf{F}_n = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^n}$ le groupe réticulé des applications de $\mathbb{Z}^n$ vers $\mathbb{Z}$ (l'ordre est donné par $f \geq 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}^n)\big(f(x) \geq 0\big)$). Pour tout élément $p = (p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{Z}^n$, on considère l'élément $\tilde{p}$ de $\mathbb{F}_n$ défini par

$$\tilde{p} \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

(3) Montrer que $\mathbf{S}_n = \{\tilde{p} \mid p \in \mathbb{Z}^n\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{F}_n, +, 0)$.

On note désormais $\mathbf{FA}_n$ le sous-groupe réticulé de $\mathbf{F}_n$ engendré par $\mathbf{S}_n$. Notons $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. Le but de ce qui suit est de montrer que $\mathbf{FA}_n$ muni de $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ est le "groupe abélien réticulé libre" à n générateurs. La question suivante est le point clé pour aboutir à cette conclusion.

(4) Soit k un entier naturel non nul et soient $p_1, \ldots, p_k$ des éléments de $\mathbb{Z}^n$. En appliquant la question (II.3.2) à l'enveloppe convexe de $X = \{p_1, \ldots, p_k\}$ dans $\mathbb{Q}^n$, montrer que $\bigwedge_{i=1}^n \tilde{p}_i \leq 0$ si et seulement si il existe des entiers naturels non tous nuls $m_1, \ldots, m_k$ tels que $\sum_{i=1}^k m_i p_i = 0$.

(5) Soient k et l deux entiers naturels non nuls et soient p_i $(1 \leq i \leq k)$ et q_j $(1 \leq j \leq l)$ des éléments de $\mathbb{Z}^n$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes:
   (i) $\bigwedge_{i=1}^{k} \tilde{p}_i \leq \bigwedge_{j=1}^{l} \tilde{q}_j$;
   (ii) Pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, il existe des entiers naturels non tous nuls $m_{1j}, \ldots, m_{kj}$ tels que $\sum_{i=1}^{k} m_{ij} p_i = \left(\sum_{i=1}^{k} m_{ij}\right) q_j$.

   Dans ce qui suit, on fixe un groupe réticulé abélien G et n éléments $a_1, \ldots, a_n$ de G.

(6) Montrer qu'il existe *au plus* un homomorphisme de groupes réticulés $f\colon \mathbf{FA}_n \to G$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(\tilde{e}_i) = a_i$.

(7) Pour tout élément $p = (p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{Z}^n$, on note $p \cdot a = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i$. Montrer qu'il existe une application $f\colon \mathbf{FA}_n \to G$ telle que pour tous entiers naturels non nuls k et l et tous éléments p_i $(1 \leq i \leq k)$ et q_j $(1 \leq j \leq l)$ de $\mathbb{Z}^n$,

$$f\left(\bigwedge_{i=1}^{k} \tilde{p}_i - \bigwedge_{j=1}^{l} \tilde{q}_j\right) = \bigwedge_{i=1}^{k} (p_i \cdot a) - \bigwedge_{j=1}^{l} (q_j \cdot a)$$

(on pourra utiliser la question (5)).

(8) Montrer que l'application f de la question précédente est un homomorphisme de groupes réticulés.

On a donc montré que *pour tout groupe réticulé abélien G et tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de G, il existe un seul homomorphisme de groupes réticulés $f\colon \mathbf{FA}_n \to G$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(\tilde{e}_i) = a_i$. Ceci est la propriété recherchée.*

Examen de Septembre 1995

Durée: 4 heures
Documents autorisés: cours + polycopié

Le but de ce problème est de définir, pour tout treillis distributif E, ***l'algèbre de Boole universelle*** *de E comme étant l'unique (à isomorphisme près) algèbre de Boole contenant E et engendrée par E, puis d'établir une propriété remarquable de cette construction, la* ***propriété de prolongement des valuations****.*

Pour résoudre une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes.

Si E est un sous-treillis d'une algèbre de Boole B (remarquer que E est nécessairement distributif), on dit que B est *R-engendrée* par E quand la sous-algèbre de Boole de B engendrée par E est égale à B. Si E est un treillis distributif et si B est une algèbre de Boole, une application $f\colon E \to B$ est un *R-plongement* quand c'est un plongement de treillis (*i.e.*, puisque nous sommes dans le contexte des treillis, un homomorphisme injectif de treillis) et B est R-engendrée par $f[E]$.

Ière partie. - *Dans cette première partie, nous montrerons le* ***Théorème de Birkhoff-Stone: tout treillis distributif se plonge dans une algèbre de Boole de la forme $\mathfrak{P}(\Omega)$, donc en particulier dans une algèbre de Boole.***

Si $(E, \vee, \wedge, 0, 1)$ est un treillis, un *filtre* de E est par définition un sous-ensemble F de E satisfaisant les propriétés suivantes:

(F0) $1 \in F$;
(F1) $(\forall x \in F)(\forall y \in E)(x \leq y \Rightarrow y \in F)$;
(F2) $(\forall x \in F)(\forall y \in F)(x \wedge y \in F)$.

1. Montrer que si F est un filtre d'un treillis E et a est un élément de E, alors l'ensemble F^a défini par

$$F^a = \{x \in E \mid (\exists x' \in F)(x \geq x' \wedge a)\}$$

est le plus petit (au sens de l'inclusion) filtre de E contenant $F \cup \{a\}$.

On se fixe désormais, dans cette partie, un treillis distributif E.

2. Soient F un filtre de E et a et b deux éléments de E. Montrer que $F^a \cap F^b = F^{a \vee b}$.

3. On dit qu'un filtre P de E est *premier* quand $P \neq E$ et P satisfait l'énoncé

$$(\forall x, y \in E)\big[x \vee y \in P \Rightarrow (x \in P \text{ ou } y \in P)\big].$$

Soit Ω l'ensemble des filtres premiers de E. Montrer que l'application suivante:

$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\to \mathfrak{P}(\Omega) \\ a &\mapsto \{P \in \Omega \mid a \in P\} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de treillis.

4. Soient a et b deux éléments de E tels que $a \not\leq b$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe $P \in \Omega$ tel que $a \in P$ et $b \notin P$. Définissons un ensemble $\mathcal{F}_{ab}$ par

$$\mathcal{F}_{ab} = \{F \mid F \text{ est un filtre de } E \text{ et } a \in F \text{ et } b \notin F\}.$$

4.1. Montrer que $\uparrow a = \{x \in E \mid a \leq x\}$ appartient à $\mathcal{F}_{ab}$.

4.2. Montrer que $\mathcal{F}_{ab}$ admet un élément maximal (pour l'inclusion).

4.3. Soit P un élément maximal de $\mathcal{F}_{ab}$. Montrer que P est un filtre premier de E (on pourra raisonner par l'absurde, et utiliser les résultats des questions (I.1) et (I.2)). En déduire que $\varphi(a) \not\subseteq \varphi(b)$.

5. En déduire que φ est un plongement.

6. En déduire que tout treillis distributif admet un R-plongement dans une algèbre de Boole (*n.b.*: un argument plus précautionneux permet d'éviter l'usage du Théorème de Zorn pour montrer ce dernier résultat).

IIème partie. - *Dans cette partie, nous établirons pour tout treillis distributif E une "propriété universelle" montrant en particulier que deux R-plongements de E dans des algèbres de Boole sont* ***isomorphes****.*

Pour tout sous-treillis E d'une algèbre de Boole B, tout $n \in \mathbb{N}$ et tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de B, nous noterons $E(\pm a_1, \ldots, \pm a_n)$ le *sous-treillis* de B engendré par $E \cup \{a_1, \neg a_1, \ldots, a_n, \neg a_n\}$. De plus, pour tous éléments x, y, et z de B, nous noterons $[x, y]_z = (x \wedge z) \vee (y \wedge \neg z)$.

1. Dans le contexte ci-dessus, montrer que la sous-algèbre de Boole de B engendrée par E est la réunion de tous les $E(\pm a_1, \ldots, \pm a_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans E.

2. Soit B une algèbre de Boole. Montrer de façon détaillée que pour tout $a \in B$, l'application

$$\begin{aligned} p_a \colon B \times B &\to B \\ (x, y) &\mapsto [x, y]_a \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'algèbres de Boole.

3. En déduire que pour toute algèbre de Boole B, pour tout sous-treillis E de B et pour tout $a \in B$,

$$E(\pm a) = \{[x, y]_a \mid x, y \in E\}.$$

4. Montrer que pour toute algèbre de Boole B et tous éléments x, x', y, y', et a de B,

$$[x, y]_a = [x', y']_a \Leftrightarrow (x \wedge a = x' \wedge a \text{ et } y \vee a = y' \vee a).$$

5. Soit E un sous-treillis d'une algèbre de Boole B, soit a un élément de E, soit C une algèbre de Boole et soit $f \colon E \to C$ un homomorphisme de treillis. Dans cette question, nous allons montrer que f se prolonge en un unique homomorphisme de treillis $g \colon E(\pm a) \to C$.

5.1. Montrer qu'un tel homomorphisme g satisfait nécessairement

$$(\forall x, y \in E)\big(g([x, y]_a) = [f(x), f(y)]_{f(a)}\big). \qquad (*)$$

En déduire l'unicité de g.

5.2. Montrer qu'il existe un homomorphisme $g\colon E(\pm a) \to C$ satisfaisant $(*)$ (on pourra utiliser les résultats des questions (II.4) et (II.2)). Conclure.

6. En déduire que si E est un sous-treillis d'une algèbre de Boole B, si $n \in \mathbb{N}$ et si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de E, alors pour toute algèbre de Boole C, tout homomorphisme $f\colon E \to C$ se prolonge en un unique homomorphisme $g\colon E(\pm a_1, \ldots, \pm a_n) \to C$.

7. En déduire que si B est une algèbre de Boole R-engendrée par un treillis E, alors pour toute algèbre de Boole C, tout homomorphisme $f\colon E \to C$ se prolonge en un unique homomorphisme $g\colon B \to C$ (on pourra utiliser le résultat de la question (II.1)).

8. En déduire que si E est un treillis distributif et $f_i\colon E \to B_i$ $(i \in \{0, 1\})$ sont des R-plongements, alors il existe un unique isomorphisme d'algèbres de Boole $\varphi\colon B_0 \to B_1$ tel que $\varphi \circ f_0 = f_1$.

Par suite, pour tout treillis distributif E, il existe un unique (à isomorphisme près) plongement de E dans une algèbre de Boole, que nous appellerons *l'algèbre de Boole universelle* de E.

9. Soit E le treillis des intervalles fermés de l'intervalle unité $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ de la forme $[0, \alpha]$ où $0 \leq \alpha \leq 1$. Quel est le plus grand élément de E (c'est à dire 1_E)? Quelle est l'algèbre de Boole universelle de E?

IIIème partie. - *Dans cette partie, nous établirons la* ***propriété de prolongement des valuations*** *d'un treillis distributif à son algèbre de Boole universelle.*

Nous utiliserons les notations de la IIème partie.

Si E est un treillis et $(G, +)$ est un groupe abélien, une *valuation* sur E à valeurs dans G est une application $v\colon E \to G$ satisfaisant aux deux propriétés suivantes:

(V0) $v(0) = 0$ (le premier 0 étant celui de E, le second celui de G).

(V1) $(\forall x, y \in E)\big[v(x \wedge y) + v(x \vee y) = v(x) + v(y)\big]$.

1. Soit G un groupe abélien, soit E un treillis distributif et soit $a \in E$. Montrer que pour toute valuation $v\colon E \to G$, l'application $v_a\colon E \to G$ définie par $v_a(x) = v(a \wedge x)$ est une valuation.

2. Soit G un groupe abélien, soit E un sous-treillis d'une algèbre de Boole B et soit a un élément de E. Le but de cette question est de montrer que toute valuation $v\colon E \to G$ se prolonge en une unique valuation $w\colon E(\pm a) \to G$.

2.1. Montrer qu'une telle valuation w satisfait nécessairement

$$(\forall x, y)\big[w([x, y]_a) = v(x \wedge a) + v(y) - v(y \wedge a)\big]. \qquad (**)$$

En déduire l'unicité de w.

2.2. Montrer qu'il existe une valuation $w\colon E(\pm a) \to G$ satisfaisant $(**)$ (on pourra utiliser les résultats des questions (II.4), (II.2) et (III.1)). Conclure.

3. En déduire que pour tout groupe abélien G, tout sous-treillis E d'une algèbre de Boole B, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous éléments $a_1, \ldots, a_n$ de E, toute valuation $v\colon E \to G$ se prolonge en une unique valuation $v\colon E(\pm a_1, \ldots, \pm a_n) \to G$.

4. En déduire que si une algèbre de Boole B est une R-extension d'un treillis E, alors pour tout groupe abélien G, toute valuation $v\colon E \to G$ se prolonge en une unique valuation $w\colon B \to G$.

5. Que donne la Question 4 dans le contexte de l'exemple donné en (II.9) pour $G = \mathbb{R}$ et v définie par $v([0, \alpha]) = \alpha$?

Examen de Décembre 1996

Durée: 4 heures
Documents autorisés: cours + polycopié

Le but de ce problème est d'établir une dualité entre les ensembles ordonnés finis et les treillis distributifs finis, et, en particulier, de montrer que cette dualité échange les plongements et les homomorphismes surjectifs. Pour résoudre une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes.

On notera toujours $\leq$ la relation d'ordre d'un ensemble ordonné. On rappelle que si P et Q sont deux ensembles ordonnés, un *homomorphisme d'ensembles ordonnés* est une application croissante de P vers Q. Un homomorphisme d'ensembles ordonnés $f\colon P \to Q$ est un *plongement* quand pour tous éléments x et y de P, $f(x) \leq f(y)$ implique que $x \leq y$. On rappelle que les plongements de treillis sont exactement les homomorphismes injectifs de treillis. Une *chaîne* est un ensemble totalement ordonné.

Pour tout ensemble ordonné P et pour tout sous-ensemble X de P, on notera

$$\downarrow X = \{p \in P \mid (\exists x \in X)(p \leq x)\},$$

et pour tout $p \in P$, on notera $\downarrow p$ au lieu de $\downarrow\{p\}$.

Par "treillis", nous entendrons toujours <u>treillis borné</u>; le plus petit et le plus grand élément d'un treillis seront notés comme d'habitude 0 et 1. Si E et F sont deux treillis, un homomorphisme de treillis de E vers F sera donc une application $f\colon E \to F$ qui est un homomorphisme pour $\vee$ et $\wedge$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Ière partie. Soit P un ensemble ordonné. On notera $\mathbf{L}(P)$ l'ensemble des parties X de P telles que $X = \downarrow X$.

1. Montrer que $\mathbf{L}(P)$ est un sous-treillis de $(\mathfrak{P}(P), \cup, \cap, \emptyset, P)$, et que si $f\colon P \to Q$ est un homomorphisme d'ensembles ordonnés, alors on peut définir un homomorphisme de treillis $\mathbf{L}(f)\colon \mathbf{L}(Q) \to \mathbf{L}(P)$ en posant, pour tout $V \in \mathbf{L}(Q)$,
$$\mathbf{L}(f)(V) = f^{-1}[V].$$
2. Soit $f\colon P \to Q$ un homomorphisme d'ensembles ordonnés. Montrer que si f est surjectif, alors $\mathbf{L}(f)$ est un plongement.
3. Soit $f\colon P \to Q$ un homomorphisme d'ensembles ordonnés. Montrer que si f est un plongement, alors $\mathbf{L}(f)$ est surjectif.

IIème partie. Soit D un treillis. Un élément p de $D \setminus \{0\}$ est *sup-irréductible* quand D satisfait l'énoncé

$$(\forall x, y)\big(p = x \vee y \Longrightarrow (p = x \text{ ou } p = y)\big),$$

et on notera $\mathbf{J}(D)$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles de D, ordonné par la restriction de l'ordre de D.

1. Expliciter $\mathbf{J}(D)$ quand D est une chaîne.

2. Expliciter $\mathbf{J}(D)$ quand $D = \mathfrak{P}(X)$ pour un ensemble quelconque X.

3. Soit D un treillis *fini*. Montrer que tout élément de D est la borne supérieure d'un ensemble (éventuellement vide) d'éléments de $\mathbf{J}(D)$ (***Indication:*** raisonner par l'absurde, et considérer un élément minimal de l'ensemble des éléments de D qui ne sont la borne supérieure d'aucune partie de $\mathbf{J}(D)$).

4. Soit D un treillis *distributif*. Montrer que pour tout élément p de $\mathbf{J}(D)$, tout entier naturel n et tous éléments x_i $(i < n)$ de D, si $p \leq \bigvee_{i<n} x_i$, alors il existe $i < n$ tel que $p \leq x_i$.

5. Soit $f\colon D \to E$ un homomorphisme de treillis distributifs finis.

5.1. Montrer que pour tout $q \in \mathbf{J}(E)$, il existe un plus petit élément p de D tel que $q \leq f(p)$, et qu'alors, $p \in \mathbf{J}(D)$.

5.2. Dans le contexte de la question précédente, on notera $p = \mathbf{J}(f)(q)$. Montrer que $\mathbf{J}(f)$ est une application croissante de $\mathbf{J}(E)$ vers $\mathbf{J}(D)$.

6. Soit $f\colon D \to E$ un homomorphisme *surjectif* de treillis distributifs finis. Montrer que $\mathbf{J}(f)$ est un plongement.

7. Soit $f\colon D \to E$ un *plongement* de treillis distributifs finis. Le but de cette question est de montrer que $\mathbf{J}(f)$ est surjectif.

7.1. Soit $p \in \mathbf{J}(D)$. Soit $\{q_i \mid i < n\}$ l'ensemble (fini) des éléments q de $\mathbf{J}(E)$ tels que $q \leq f(p)$. Pour tout $i < n$, posons $p_i = \mathbf{J}(f)(q_i)$. Montrer que pour tout $i < n$, l'on a $p_i \leq p$ et $q_i \leq f(p_i)$.

7.2. Soit $p^* = \bigvee_{i<n} p_i$. Montrer que $f(p) \leq f(p^*)$, puis que $p = p^*$.

7.3. En déduire que l'un des p_i est égal à p. Conclure.

IIIème partie.

1. Soit P un ensemble ordonné fini. Montrer que l'on peut définir un isomorphisme $\varepsilon_P\colon P \to \mathbf{J}(\mathbf{L}(P))$ en posant, pour tout élément p de P,

$$\varepsilon_P(p) = \downarrow p.$$

(***Indication:*** montrer d'abord que pour tout élément U de $\mathbf{L}(P)$, si X est l'ensemble des éléments maximaux de U, alors $U = \bigcup_{p\in X} \downarrow p$).

2. Soit $f\colon P \to Q$ un homomorphisme d'ensembles ordonnés finis. Montrer que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varepsilon_P} & \mathbf{J}(\mathbf{L}(P)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{J}(\mathbf{L}(f))} \\ Q & \xrightarrow[\varepsilon_Q]{} & \mathbf{J}(\mathbf{L}(Q)) \end{array}$$

est commutatif, *i.e.*, que $\mathbf{J}(\mathbf{L}(f)) \circ \varepsilon_P = \varepsilon_Q \circ f$.

IVème partie.

1. Soit D un treillis distributif fini. Montrer que l'on peut définir un isomorphisme $\eta_D\colon D \to \mathbf{L}(\mathbf{J}(D))$ en posant, pour tout $x \in D$,

$$\eta_D(x) = \{p \in \mathbf{J}(D) \mid p \leq x\}.$$

2. Soit $f\colon D \to E$ un homomorphisme de treillis distributifs finis. Montrer que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{L}(\mathbf{J}(D)) \arrow[d, "\mathbf{L}(\mathbf{J}(f))"] \\ E \arrow[r, "\eta_E"'] & \mathbf{L}(\mathbf{J}(E)) \end{tikzcd}$$

est commutatif, *i.e.*, que $\mathbf{L}(\mathbf{J}(f)) \circ \eta_D = \eta_E \circ f$.

Vème partie.

1. Soit $f\colon P \to Q$ un homomorphisme d'ensembles ordonnés finis.

1.1. Montrer que f est surjectif si et seulement si $\mathbf{L}(f)$ est un plongement.

1.2. Montrer que f est un plongement si et seulement si $\mathbf{L}(f)$ est surjectif.

2. Soit $f\colon D \to E$ un homomorphisme de treillis distributifs finis.

2.1. Montrer que f est surjectif si et seulement si $\mathbf{J}(f)$ est un plongement.

2.2. Montrer que f est un plongement si et seulement si $\mathbf{J}(f)$ est surjectif.

VIème partie. Pour tout entier naturel k, on munit $\overline{k} = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ de sa relation d'ordre naturelle. Nous nous proposons d'étudier dans cette partie le treillis distributif universellement engendré par deux chaînes finies de longueurs données entre 0 et 1.

1. Soient m et n deux entiers naturels. On munit $\overline{m} \times \overline{n}$ de l'ordre produit des ordres canoniques sur $\overline{m}$ et $\overline{n}$. Soit D un treillis distributif muni de deux chaînes $0 = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_m = 1$ et $0 = b_0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n = 1$. Posons, pour tout $i \in \overline{m+1}$ (resp., $j \in \overline{n+1}$), $U_i = \bar{\imath} \times \overline{n}$ (resp., $V_j = \overline{m} \times \bar{\jmath}$). Montrer qu'il existe un seul homomorphisme de treillis $f\colon \mathbf{L}(\overline{m} \times \overline{n}) \to D$ satisfaisant les conditions

$$(\forall i \in \overline{m+1})\big[f(U_i) = a_i\big],$$
$$(\forall j \in \overline{n+1})\big[f(V_j) = b_j\big].$$

(***Indication:*** on pourra d'abord exprimer tout élément X de $\mathbf{L}(\overline{m} \times \overline{n})$ comme un "polynôme", utilisant $\cap$ et $\cup$, en les U_i et les V_j).

Par suite, le treillis recherché n'est autre que $D_{m,n} = \mathbf{L}(\overline{m} \times \overline{n})$.

2. Dans le contexte de la Question 1, exprimer les éléments sup-irréductibles (*voir* la IIème partie pour définition) de $D_{m,n}$ en fonction des U_i et des V_j.

3. Exprimer tous les éléments de $D_{2,2}$ en fonction de 0, 1 et U_1, V_1. Quel est le cardinal de $D_{2,2}$?

4. Représenter $D_{2,2}$ sur une figure (*convention:* si $x \prec y$, *i.e.*, $x < y$ et il n'existe aucun z tel que $x < z < y$, mettre x plus bas que y et tracer un segment entre x et y).

5. Quel est le cardinal de $D_{3,3}$?

6. Représenter $D_{3,3}$ sur une figure.

Examen de Septembre 1997

Durée: 4 heures

Documents autorisés: cours + polycopié

Le but principal de ce problème est d'établir le résultat classique de Funayama et Nakayama (1942) disant que l'ensemble des congruences de tout treillis, ordonné par inclusion, est un treillis algébrique distributif.

Pour résoudre une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes.

Si θ est une relation binaire sur un ensemble X et si x, $y \in X$, on notera $x \equiv_\theta y$ au lieu de $x\theta y$ (c.à.d., $(x, y) \in \theta$), même si θ n'est pas *a priori* une relation d'équivalence.

Dans tout le problème, on se fixe un treillis $\langle L, \vee, \wedge, \leq \rangle$.

Une *congruence* de L est par définition une relation d'équivalence θ sur L telle que pour tous x, y et z dans L tels que $x \equiv_\theta y$, l'on ait

$$x \wedge z \equiv_\theta y \wedge z \quad \text{et} \quad x \vee z \equiv_\theta y \vee z.$$

On notera $\operatorname{Con} L$ l'ensemble des congruences de L, ordonné par inclusion.

1ère Partie.

1.1. Établir que L satisfait les *inégalités de distributivité* suivantes:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c), \quad \text{et} \quad a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

1.2. Soit θ une congruence de L. Montrer que pour tous éléments a_0, a_1, b_0, et b_1 de L,

$$(a_0 \equiv_\theta b_0 \text{ et } a_1 \equiv_\theta b_1) \quad \text{implique que} \quad (a_0 \vee a_1 \equiv_\theta b_0 \vee b_1 \text{ et } a_0 \wedge a_1 \equiv_\theta b_0 \wedge b_1).$$

1.3. Soient a, b, c, et d des éléments de L, soit θ une congruence de L. Montrer que

$$(a \leq b \leq d \text{ et } a \leq c \leq d \text{ et } a \equiv_\theta d) \qquad \text{implique que} \qquad b \equiv_\theta c.$$

(***Indication:*** on pourra commencer par appliquer la définition d'une congruence à $a \equiv_\theta d$).

1.4. Soit θ une congruence de L, et soient x et y deux éléments de L. Montrer que $x \equiv_\theta y$ si et seulement si $x \wedge y \equiv_\theta x \vee y$.

2ème Partie. Le but de cette partie est d'établir une réciproque à la Question **1.4**. Pour toute relation binaire θ sur L, on dit que θ est une *quasi-congruence* de L quand elle satisfait les quatre conditions suivantes:

(QC1) θ est réflexive (*i.e.*, $x \equiv_\theta x$ pour tout $x \in L$).

(QC2) Pour tous x, $y \in L$, $x \equiv_\theta y$ si et seulement si $x \wedge y \equiv_\theta x \vee y$.

(QC3) Pour tous x, y, $z \in L$,

$$(x \leq y \leq z \text{ et } x \equiv_\theta y \text{ et } y \equiv_\theta z) \qquad \text{entraîne que} \qquad x \equiv_\theta z.$$

(QC4) Pour tous x, y, $z \in L$, $x \leq y$ et $x \equiv_\theta y$ entraîne que $x \vee z \equiv_\theta y \vee z$ et $x \wedge z \equiv_\theta y \wedge z$.

Pendant toute cette partie, on se fixe une quasi-congruence θ de L. Le but de cette partie est de montrer que θ est une congruence de L.

2.1. Montrer que pour tous éléments a, b, c, et d de L, on a

$$(a \leq b \leq c \leq d \text{ et } a \equiv_\theta d) \qquad \text{implique que} \qquad b \equiv_\theta c.$$

2.2. Soient x, y, $z \in L$ tels que $x \equiv_\theta y$ et $y \equiv_\theta z$, le but des deux questions suivantes est de montrer que $x \equiv_\theta z$.

2.2.1. Montrer que $y \vee z \equiv_\theta x \vee y \vee z$ (***Indication:*** on pourra appliquer (QC4) à la relation $y \wedge x \equiv_\theta y \vee x$). Montrer de même que $y \wedge z \equiv_\theta x \wedge y \wedge z$.

2.2.2. Montrer que $x \wedge z \equiv_\theta x \vee z$ (***Indication:*** on pourra utiliser la Question **2.1**). Conclure.

2.3. Soient x, y, $z \in L$ tels que $x \equiv_\theta y$. Montrer que $x \vee z \equiv_\theta y \vee z$ et $x \wedge z \equiv_\theta y \wedge z$ (***Indication:*** on pourra utiliser les Questions **1.1** et **2.1**). Conclure.

3ème Partie.

3.1. Montrer que toute intersection de congruences de L est une congruence de L.

3.2. En déduire que $\operatorname{Con} L$ est un treillis complet. Quelle est la borne inférieure d'une famille de congruences de L? Quels sont le plus petit et le plus grand élément de $\operatorname{Con} L$?

3.3. Soient β et γ deux congruences sur L. On définit une relation binaire α sur L en disant que pour tous éléments x et y de L, $x \equiv_\alpha y$ si et seulement si il existe un entier naturel n et une suite finie $(z_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de L telle que

$$x \wedge y = z_0 \leq z_1 \leq \cdots \leq z_n = x \vee y$$

et pour tout $i < n$, l'on ait $z_i \equiv_\beta z_{i+1}$ ou $z_i \equiv_\gamma z_{i+1}$.

3.3.1. Montrer que α est une quasi-congruence au sens de la 2ème Partie.

3.3.2. En déduire que α est la borne supérieure de $\{\beta, \gamma\}$ dans $\operatorname{Con} L$ (*i.e.*, $\alpha = \beta \vee \gamma$).

3.4. Soient α, β et γ des congruences de L. Soient x, y, $z \in L$ tels que

$$x \equiv_{\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)} y.$$

En utilisant le fait que $x \equiv_{\beta \vee \gamma} y$ et les Questions **1.3** et **3.3**, montrer que l'on a

$$x \equiv_{(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)} y.$$

En déduire que $\operatorname{Con} L$ est un treillis distributif.

4ème Partie.

4.1. Soient a, $b \in L$. Montrer qu'il existe une plus petite congruence θ de L telle que $a \equiv_\theta b$.

On notera $\Theta(a, b)$ cette congruence, et on dira qu'une congruence θ est *principale* quand elle est de la forme $\Theta(a, b)$ pour un certain couple (a, b) d'éléments de L. Puis on dira qu'une congruence θ de L est *finiment*

engendrée quand elle est de la forme

$$\theta = \bigvee_{i=1}^{n} \Theta(a_i, b_i)$$

où n est un entier naturel et les a_i, b_i $(1 \leq i \leq n)$ sont des éléments de L.

Enfin, on dit qu'une congruence θ de L est *compacte* quand pour tout ensemble I et toute famille $(\theta_i)_{i \in I}$ de congruences de L,

$$\theta \subseteq \bigvee_{i \in I} \theta_i$$

entraîne l'existence d'une partie *finie* J de I telle que

$$\theta \subseteq \bigvee_{i \in J} \theta_i.$$

4.2. Montrer que toute congruence principale de L est compacte. Pour ce faire, si $\Theta(a, b) \subseteq \bigvee_{i \in I} \theta_i$, on pourra considérer l'ensemble P des parties finies de I, puis poser, pour tout $J \in P$, $\rho_J = \bigvee_{i \in J} \theta_i$, puis montrer que $\bigvee_{i \in I} \theta_i = \bigcup_{J \in P} \rho_J$ (observer que $J_0 \subseteq J_1$ implique que $\rho_{J_0} \subseteq \rho_{J_1}$).

4.3. En déduire que toute congruence de L est la borne supérieure d'un ensemble de congruences compactes.

4.4. Montrer que toute réunion finite de congruences compactes est compacte. En déduire que toute congruence finiment engendrée est compacte.

4.5. Réciproquement, montrer que toute congruence compacte de L est finiment engendrée. Conclure.

Bibliographie

[**AnFe**] M. Anderson *et* T. Feil, "Lattice-Ordered Groups. An Introduction." D. Reidel, 1988. x+190pp.

[**Ando**] T. Andô, "On fundamental properties of a Banach space with a cone", *Pacific Journal of Mathematics* **12** (1962), pp. 1163–1169.

[**ArLe**] M. Arsove *et* H. Leutwiler, "Algebraic potential theory", *Memoirs of the American Mathematical Society* **23** (226), 1980. vi+130pp.

[**Bake**] K. A. Baker, "Free vector lattices", *Canadian Journal of Mathematics* **20** (1968), pp. 58–66.

[**Ball**] R. N. Ball, "Full convex ℓ-subgroups of a lattice-ordered group", PhD thesis, Univ. of Wisconsin, 1974.

[**BaDr**] R. N. Ball *et* M. Droste, "Normal subgroups of doubly transitive automorphism groups of chains", *Transactions of the American Mathematical Society* **290** (1985), pp. 647–664.

[**BaTa**] S. Banach *et* A. Tarski, "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes", *Fundamenta Mathematicæ* **6** (1924), pp. 244–277.

[**Bana**] B. Banaschewski, "Totalgeordnete Moduln", *Archiv der Mathematik* **7** (1956), pp. 430–440.

[**Beck**] E. Becker, "On the real spectrum of a ring and its applications to semi-algebraic geometry", *Bulletin of the American Mathematical Society* **15** (1986), pp. 19–60.

[**Bell**] J. L. Bell, "On the strength of the Sikorski extension theorem for Boolean algebras", *Journal of Symbolic Logic* **48**, no. 3 (September 1983), pp. 841–846.

[**Bern1**] S. J. Bernau, "Free abelian lattice groups", *Mathematische Annalen* **180** (1969), pp. 48–59.

[**Bern2**] S. J. Bernau, "Lateral and Dedekind-completion of Archimedean lattice groups", *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 12, part 3 (1976), pp. 320–322.

[**Beyn1**] W. M. Beynon, "Combinatorial aspects of piecewise linear functions", *Journal of the London Mathematical Society* **7** (1974), pp. 719–727.

[**Beyn2**] W. M. Beynon, "Duality theorems for finitely generated vector lattices", *Proceedings of the London Mathematical Society* **31** (1975), pp. 114–128.

[**Beyn3**] W. M. Beynon, "Applications of duality in the theory of finitely generated lattice-ordered abelian groups", *Canadian Journal of Mathematics* **29** (1977), pp. 243–254.

[**Beyn4**] W. M. Beynon, "On rational subdivisions of polyhedra with rational vertices", *Canadian Journal of Mathematics* **29** (1977), pp. 243–254.

[**Beyn5**] W. M. Beynon, "Free constructions in ordered abelian monoids and groups", in S. Wolfenstein, editor, *Algebra and Order*, pages 47–62, Proceedings of the First International Symposium on Ordered Algebraic Structures Luminy-Marseille 1984, Heldermann Verlag, 1986.

[**BiKe**] A. Bigard *et* K. Keimel, "Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien", *Bulletin de la Société Mathématique de France* **97** (1969), pp. 381–398.

[**Biga** *et al.*] A. Bigard, K. Keimel, *et* S. Wolfenstein, "Groupes et anneaux réticulés", Lecture Notes in Mathematics no. **608**, Springer-Verlag, 1977.

[**Birk1**] G. Birkhoff, "Lattice-ordered groups", *Annals of Mathematics* **43** (1942), pp. 298–331.

[**Birk2**] G. Birkhoff, "Lattice theory", American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. **25**, 3ème édition, 7ème impression, 1993. vi+418pp.

[**BiPi**] G. Birkhoff, *et* R. S. Pierce, "Lattice-ordered rings", *Anais Acad. Brasil. Ci.* **28** (1956), pp. 41–69.

[**BoCR**] J. Bochnak, M. Coste, *et* M. F. Roy, "Géométrie algébrique réelle", Vol. **12** de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, S. Folge*, Springer-Verlag, 1987.

[**Bolt**] W. G. Boltianskii, "Hilbert's third problem", translated by R. Silverman, Washington, D.C.: Winston, 1978.

[**Brad**] R. Bradford, "Cardinal addition and the axiom of choice", *Annals of Mathematical Logic* **3** (1971), pp. 111–196.

[**Burr**] S. Burris, "A simple proof of the hereditary undecidability of the theory of lattice-ordered abelian groups", *Algebra Universalis* **200** (1985), pp. 400–401.

[**BuMK**] S. Burris *et* R. McKenzie, "Decidability and Boolean representations", *Memoirs of the American Mathematical Society* Vol. **32** no. 246 (1981), viii+106p..

[**BuSa**] S. Burris *et* H. P. Sankappanavar, "A course in Universal Algebra", New-York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[**CaPr**] T. Carlson *et* K. Prikry, "Ranges of signed measures", *Periodica Mathematica Hungarica* **13** (1982), pp. 151–155.

[**Cart**] P. Cartier, "Décomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert", *Séminaire Bourbaki*, 37ème année, 1984-85 (Juin 1985), no. 646, 28 p.

[**ChKe**] C. C. Chang *et* H. J. Keisler, "Model Theory", North Holland Publishing Company, 1973.

[**Choq1**] G. Choquet, "Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes", Séminaire Bourbaki (1956–57), Exposé 139, Secrétariat Mathématique, Paris, 1959.

[**Choq2**] G. Choquet, "Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts", *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble* **10** (1960), pp. 333–344.

[**Chri**] J. P. R. Christensen, "Topology and Borel structure", North Holland Publishing Company, 1974.

[**Chua1**] R. Chuaqui, "Cardinal algebras and measures invariant under equivalence relations", *Transactions of the American Mathematical Society* **142** (1969), pp. 61–79.

[**Chua2**] R. Chuaqui, "Cardinal algebras of functions and integration", *Fundamenta Mathematicæ* **71** (1971), pp. 77–84.

[**Chua3**] R. Chuaqui, "A representation theorem for linearly ordered cardinal algebras", *Fundamenta Mathematicæ* **LXXI** (1971), pp. 85–91.

[**Chua4**] R. Chuaqui, "Simple cardinal algebras", *Notas Mathemáticas Universidad Católica de Chile*, vol. **6** (1976), pp. 106–131.

[**Chua5**] R. Chuaqui, "Measures invariant under a group of transformations", *Pacific Journal of Mathematics* **68**, no. 2 (1977), pp. 313–329.

[**Clar**] A. B. Clarke, "On the representation of cardinal algebras by directed sums", *Transactions of the American Mathematical Society* **91** (1959), pp. 161–192.

[**Clif1**] A. H. Clifford, "Partially ordered abelian groups", *Annals of Mathematics* **41** (1940), pp. 465–473.

[**Clif2**] A. H. Clifford, "Note on Hahn's theorem on ordered abelian groups", *Proceedings of the American Mathematical Society* **5** (1954), pp. 860–863.

[**ClPr**] A. H. Clifford *et* G. B. Preston, "The algebraic theory of semigroups", Mathematical Surveys 7, American Mathematical Society, Providence, R.I., vol. **1**, 1961 et vol. **2**, 1967.

[**CoGo**] L. W. Cohen *et* C. Goffman, "The topology of ordered abelian groups", *Transactions of the American Mathematical Society* **67** (1949), pp. 310–319.

[**Cohe1**] P. Cohen, "Independence results in set theory", *The Theory of Models*, J. Addison, L. Henkin et A. Tarski, eds., North-Holland, Amsterdam, 1965, pp. 39–54.

[**Cohe2**] P. Cohen, "The independence of the continuum hypothesis, I", *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* **50** (1963), pp. 1143–1148.

[**Cohe3**] P. Cohen, "The independence of the continuum hypothesis, II", *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* **51** (1964), pp. 105–110.

[**Cohe4**] P. Cohen, "Set Theory and the Continuum Hypothesis" (Benjamin, New York, 1966).

[**Conr1**] P. F. Conrad, "Embedding theorems for abelian groups with valuations", *American Journal of Mathematics* **75** (1953), pp. 1–29.

[**Conr2**] P. F. Conrad, "Some structure theorems for lattice-ordered groups", *Transactions of the American Mathematical Society* **99** (1961), pp. 212–240.

[**Conr3**] P. F. Conrad, "Introduction à la théorie des groupes réticulés", conférences à l'Institut Henri Poincaré (Paris), Mai-Juin 1967, rédigées par B. Gostiaux et S. Wolfenstein.

[**Conr4**] P. F. Conrad, "Lex-subgroups of lattice-ordered groups", *Czech. Math. Journal* **18** (93) (1968), pp. 86–103.

[**CoDi**] P. F. Conrad *et* J. E. Diem, "The ring of polar preserving endomorphisms of an abelian lattice-ordered abelian group", *Illinois Journal of Mathematics* **15** (1971), pp. 222–240.

[**CoHH**] P. Conrad, J. Harvey, *et* W. C. Holland, "The Hahn embedding theorem for lattice-ordered groups", *Transactions of the American Mathematical Society* **108** (1963), pp. 143–169.

[**CrDi**] P. Crawley *et* R. P. Dilworth, "Algebraic theory of lattices", Prentice-Hall, 1973.

[**Dede**] R. Dedekind, "Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler", in *Festschrift der Techn. Hochschule Braunschweig bei Gelegenheit der 69. Vers. Dt. Naturforscher und Ärzte*, pp. 1–40, 1897; *voir* aussi: *Gesammelte Mathematische Werke*, **2**. Bd, pp. 103–147, Reprint Chelsea Publishing Company, 1969.

[**DeMe**] C. Dellacherie *et* P. A. Meyer, "Théorie discrète du potentiel", Hermann, 1983.

[**Delz1**] C. N. Delzell, "A sup-inf-polynomially varying solution to Hilbert's 17th problem", Louisiana State University.

[**Delz2**] C. N. Delzell, "On the Birkhoff-Pierce conjecture over ordered fields", *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **19** (1989), pp. 651–668.

[**Dilw1**] R. P. Dilworth, "A decomposition theorem for partially ordered sets", *Annals of Mathematics* **51**, no. 1 (January 1950), pp. 161–166.

[**Dilw2**] R. P. Dilworth, "The structure of relatively complemented lattices", *Annals of Mathematics* **51**, no. 2 (March 1950), pp. 348–359.

[**Dilw3**] R. P. Dilworth, "Some combinatorial problems on partially ordered sets", in *Combinatorial Analysis, Proceedings Symp. Appl. Math.*, American Mathematical Society (1960), pp. 85–90.

[**Dobb**] H. Dobbertin, "Abzählbare Boolesche Algebren", Diplomarbeit, Universität Hannover, Februar 1980.

[**DobbII**] H. Dobbertin, "On Vaught's criterion for isomorphism of countable Boolean algebras", *Algebra Universalis* **15** (1982), pp. 95–114.

[**DobbIII**] H. Dobbertin, "Refinement monoids, Vaught Monoids, and Boolean Algebras", *Mathematische Annalen* **265** (1983), pp. 475–487.

[**DobbIV**] H. Dobbertin, "Primely generated regular refinement monoids", *Journal of Algebra* **91** (1984), pp. 166–175.

[**DobbV**] H. Dobbertin, "Measurable refinement monoids and applications to distributive semilattices, Heyting algebras and Stone spaces", *Mathematische Zeitschrift* **187** (1984), pp. 13–21.

[**DobbVI**] H. Dobbertin, "About polytopes of valuations on finite distributive lattices", *Order* **2**, no. 2 (1985), pp. 193–198.

[**DobbVII**] H. Dobbertin, "Vaught's measures and their applications in lattice theory", *Journal of Pure and Applied Algebra* **43**, no. 1 (1986), pp. 27–51.

[**DoFo1**] R. Dougherty *et* M. Foreman, "Banach-Tarski decompositions using pieces with the property of Baire", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **89** (1992), no. 22, pp. 10726–10728.

[**DoFo2**] R. Dougherty *et* M. Foreman, "Banach-Tarski decompositions using sets with the property of Baire", *Journal of the American Mathematical Society*, Vol. **7**, no. 1 (January 1994), pp. 75–124.

[**Dros**] M. Droste, "The subgroup lattice of 2-transitive automorphism groups of linearly ordered sets", *Order* **2** (1985), pp. 291–319.

[**DrSh**] M. Droste *et* S. Shelah, "A construction of all normal subgroup lattices of 2-transitive automorphism groups of linearly ordered sets", *Israel Journal of Mathematics* **51** (1985), pp. 223–261.

[**EfHS**] E. G. Effros, D. E. Handelman *et* C-L. Shen, "Dimension groups and their affine representations", *American Journal of Mathematics*, vol. **102** (1980), no. 2, pp. 385–407.

[**EfSh**] E. G. Effros, *et* C-L. Shen, "Dimension groups and finite difference equations", *Journal of Operator Theory* **2** (1979), pp. 215–231.

[**ElMu**] G. A. Elliott *et* D. Mundici, "A characterization of lattice-ordered abelian groups", *Mathematische Zeitschrift* **213** (1993), pp. 179–185.

[**EvUl**] C. J. Everett *et* S. Ulam, "On ordered groups", *Transactions of the American Mathematical Society* **57** (1945), pp. 208–216.

[**Fill1**] P. A. Fillmore, "An Archimedean property of cardinal algebras", *Michigan Mathematical Journal* **11** (1964), pp. 365–367.

[**Fill2**] P. A. Fillmore, "The dimension theory of certain cardinal algebras", *Transactions of the American Mathematical Society* **117** (1965), pp. 21–36.

[**Foln**] E. Følner, "On groups with full Banach mean value", *Mathematica Scandinavica* **3** (1955), pp. 243–254.

[**FoWe**] M. Foreman *et* F. Wehrung, "The Hahn-Banach theorem implies the existence of a non-measurable set", *Fundamenta Mathematicæ* **138** (1991), pp. 13–19.

[**Frae1**] A. A. Fraenkel, "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre", *Mathematische Annalen* **86** (1922), pp. 230–237.

[**Frae2**] A. A. Fraenkel, "Der Begriff "definit" und die Unabhängigheit des Auswahlaxioms", *Sitzungber. Preussischen Akad. Wiss., Math. Kl.* (1922), pp.253–257.

[**Freu**] H. Freudenthal, "Teilweise geordnete Moduln", *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* **39** (1936), pp. 641–651.

[**Frin1**] O. Frink, "Topology in lattices", *Transactions of the American Mathematical Society* **51** (1942), pp. 569–582.

[**Frin2**] O. Frink, "Complemented modular lattices and projective spaces of infinite dimension", *Transactions of the American Mathematical Society* **60** (1946), pp. 452–467.

[**Fuch1**] L. Fuchs, "Partially ordered algebraic systems", Addison-Wesley, Reading, Massachusets, 1963.

[**Fuch2**] L. Fuchs, "Infinite abelian groups", vol. I, 1970 et vol. II, 1973, Academic Press.

[**Fuch3**] L. Fuchs, "Abelian p-groups and mixed groups", Montréal, 1980.

[**Gain**] S. Găină, "Order topologies in Boolean algebras", *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* **17**, no. 2 (1972), pp. 243–251.

[**Galv**] F. Galvin, "A Proof of Dilworth's Chain Decomposition Theorem", *The American Mathematical Monthly*, Vol. **101**, no. 4 (April 1994), pp. 352–353.

[**Gard1**] R. J. Gardner, "Convex bodies equidecomposable by locally discrete groups of isometries", *Mathematika* **32** (1985), pp. 1–9.

[**Gard2**] R. J. Gardner, "Measure theory and some problems in geometry", *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **39** (1989), pp. 39–60 (Proceedings of the conference on real analysis and measure theory held in Capri, 1988).

[**GaLa**] R. J. Gardner *et* M. Laczkovich, "The Banach-Tarski theorem on polygons, and the cancellation law", *Proceedings of the American Mathematical Society* **109** (1990), 1097–1102.

[**Gier** *et al.*] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, *et* D. S. Scott, "A compendium of continuous lattices", Springer-Verlag, 1980.

[**GiJe**] L. Gillman *et* M. Jerison, "Rings of Continuous Functions", D. Van Nostrand Company, 1960.

[**GlHo**] A. M. W. Glass *et* W. Ch. Holland (Eds.), "Lattice-Ordered Groups. Advances and Techniques", Kluwer Acad. Publ., 1989. xx+380pp.

[**GlGu**] A. M. W. Glass *et* Y. GUREVICH, "The word problem for lattice-ordered groups", *Transactions of the American Mathematical Society* **280** (1983), pp. 127–138.

[**Glas**] A. M. W. Glass, "Ordered permutation groups", Cambridge University Press, London, 1981.

[**GlMa**] A. M. W. Glass *et* J. J. Madden, "The word problem versus the isomorphism problem", *Journal of the London Mathematical Society* (2) **30** (1984), pp. 53–61.

[**Godl1**] K. Gödel, "The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* **24** (1938), pp. 556–557.

[**Godl2**] K. Gödel, "The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory". Ann. of Math. Studies no. 3, Princeton University Press, 1940.

[**Good1**] K. R. Goodearl, "Algebraic representations of Choquet simplexes", *Journal of Pure and Applied Algebra* **11** (1977), pp. 111–130.

[**Good2**] K. R. Goodearl *et* R.B. WARFIELD Jr., "State spaces of K_0 of noetherian rings", *Journal of Algebra* **71** (1981), pp. 322–378.

[**Good3**] K. R. Goodearl, "Partially ordered abelian groups with the interpolation property", Mathematical surveys and monographs, number **20**, American Mathematical Society, 1986.

[**Good4**] K. R. Goodearl, "Extensions of dimension groups and AF C^*-algebras", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **412** (1990), pp. 150–219.

[**Good5**] K. R. Goodearl, "Von Neumann Regular Rings", Pitman, London, 1979; Second Ed., Krieger, Malabar, Fl., 1991.

[**Good6**] K. R. Goodearl, "K_0 of multiplier algebras of C^*-algebras with real rank zero", *K-Theory* **10** (1996), pp. 419–489.

[**Good7**] K. R. Goodearl, "Von Neumann regular rings and direct sum decomposition problems", *Abelian Groups and Modules, Padova 1994* (A. Facchini and C. Menini, eds.), Dordrecht (1995) Kluwer, pp. 249–255.

[**GoHa1**] K. R. Goodearl *et* D. E. Handelman, "Rank functions and K_0 of regular rings", *Journal of Pure and Applied Algebra* **7** (1976), pp. 195–216.

[**GoHa2**] K. R. Goodearl *et* D. E. Handelman, "Tensor products of dimension groups and K_0 of unit-regular rings", *Canadian Journal of Mathematics*, vol. **38**, no. 3 (1986), pp. 633–658.

[**GoHL**] K. R. Goodearl, D. E. Handelman, *et* J. W. Lawrence, "Affine representations of Grothendieck groups and their applications to Rickart C^*-algebras and $\aleph_0$-continuous rings", *Memoirs of the American Mathematical Society* **234** (1980).

[**Grät1**] G. Grätzer, "Lattice Theory: first concepts and distributive lattices", W. H. Freeman, San Francisco, 1971.

[**Grät2**] G. Grätzer, "General Lattice Theory", Birkhäuser Verlag, Basel, et Academic Press, New York, 1978.

[**Grät3**] G. Grätzer, "Universal algebra", D. Van Nostrand, 1968.

[**Grät4**] G. Grätzer, "Universal Algebra", 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[**GrLa**] G. Grätzer *et* H. Lakser, "Equationally compact semilattices", *Colloquium Mathematicum* **20**, no. 1 (1969), pp. 27–30.

[**Grav1**] K. A. H. Gravett, "Valued linear spaces", *Quarterly Journal of Mathematics Oxford (2)* **6** (1955), pp. 309–315.

[**Grav2**] K. A. H. Gravett, "Ordered abelian groups", *Quarterly Journal of Mathematics Oxford (2)* **7** (1956), pp. 57–63.

[**Grav3**] K. A. H. Gravett, "Metrics of sets and linear spaces", *Quarterly Journal of Mathematics Oxford (2)* **10** (1959), pp. 9–16.

[**Gree**] F. Greenleaf, "Invariant means on topological groups", Van Nostrand, Reinhold Company, 1969.

[**Gril**] P. A. Grillet, "Directed colimits of free commutative semigroups", *Journal of Pure and Applied Algebra* **9** (1976), no. 1, pp. 73–87.

[**Hahn**] H. Hahn, "Über die nichtarchimedischen Größensysteme", *Sitzungsber. Kaiserlichen Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. IIa*, **116** (1907), pp. 601–655.

[**Hall**] M. Hall Jr., "Distinct representatives of subsets", *Bulletin of the American Mathematical Society* **54** (1948), pp. 922–926.

[**Halm1**] P. R. Halmos, "Measure Theory", D. Van Nostrand, 1958.

[**Halm2**] P. R. Halmos, "Algebraic Logic", Chelsea Publishing Company, New York, 1962.

[**HaLe**] J. D. Halpern *et* A. Levy, "The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice", *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, University of California, Los Angeles*, **13**, Part I (D. Scott, ed.), pp. 83–134, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.

[**Hanf**] W. Hanf, "On some fundamental problems concerning isomorphism of Boolean algebras", *Mathematica Scandinavica* **5** (1957), pp. 205–217.

[**HeIs**] M. Henriksen *et* J. R. Isbell, "Lattice-ordered rings and function rings", *Pacific Journal of Mathematics* **12** (1962), pp. 533–565.

[**Higm**] G. Higman, "On infinite simple groups", *Publ. Math. Debrecen* **3** (1954), pp. 221–226.

[**Hodg**] W. Hodges, "Krull implies Zorn", *Journal of the London Mathematical Society* (2) **19**, pp. 285–287.

[**Holl**] W. Ch. Holland, "The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set", *Michigan Mathematical Journal* **10** (1963), pp. 399–408.

[**HoCl**] W. Ch. Holland *et* S.H. McCleary, "Solvability of the word problem in free lattice-ordered groups", *Houston Journal of Mathematics* **5** (1979), pp. 99–105.

[**Howi**] J. M. Howie, "An introduction to semigroup theory", Academic Press: London, New York, San Francisco, 1976.

[**Isbe**] J. R. Isbell, "Notes on ordered rings", *Algebra Universalis* **1** (1972), pp. 393–399.

[**Jaco**] N. Jacobson, "Basic Algebra I", W.H. Freeman and Company, 1974.

[**Jaff1**] P. Jaffard, "Contribution à l'étude des groupes ordonnés", *J. Math. Pures Appl.* **32** (1953), pp. 203–280.

[**Jaff2**] P. Jaffard, "Extensions de groupes réticulés et applications", *Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A* **1** (1954), pp. 197–222.

[**Jaff3**] P. Jaffard, "Sur le spectre d'un groupe réticulé et ℓ-unicité des réalisations irréductibles", *Ann. Univ. Lyon Sect. A* **22** (1959), pp. 43–47.

[**Jaku1**] J. Jakubík, "On σ-complete lattice-ordered groups", *Czechoslovak Mathematical Journal* **23** (98) (1973), pp. 164–174.

[**Jaku2**] J. Jakubík, "Conditionally orthogonally complete ℓ-groups", *Math. Nachr.* **65** (1975), pp. 153–162.

[**Jech1**] T. Jech, "The axiom of choice", North-Holland, 1973.

[**Jech2**] T. Jech, "Set Theory", Academic Press, 1978.

[**Jech3**] T. Jech, "Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing", *Transactions of the American Mathematical Society* **289** (1985), pp. 133–162.

[**Jech4**] T. Jech, "Boolean-valued models", *in* Handbook of Boolean algebras (Edited by J. D. Monk), North-Holland, vol. 3, pp. 1197–1211, 1989.

[**Jech5**] T. Jech, "Boolean-linear spaces", *Advances in Mathematics* **81** (1990), pp. 117–197.

[**John**] P. Johnstone, "Stone spaces", Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **3**, 1982.

[**Keim1**] K. Keimel, "Représentation de groupes et d'anneaux réticulés par des sections dans des faisceaux", Thèse Doctorat d'État Paris, 1970.

[**Keim2**] K. Keimel, "The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves", in *Lecture Notes on the Applications of sheaves to Ring Theory*, pp. 1–96. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **248**, Springer-Verlag, 1971.

[**Keim3**] K. Keimel, "Trends in lattice-ordered groups and rings", Lattice Theory and its Applications, K. A. Baker, R. Wille (eds.), Heldermann Verlag 1995, pp. 131–161.

[**KeRo**] K. Keimel *et* W. Roth, "Ordered cones and Approximation", Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1517**, Springer-Verlag, 1992; vi+134pp..

[**Kell**] J. L. Kelley, "General Topology", Van Nostrand, revised edition, 1968.

[**Keto**] J. Ketonen, "The structure of countable Boolean algebras", *Annals of Mathematics* **108**, no. 1 (1978), pp. 41–89.

[**Khis**] N. G. Khisamiev, "The universal theory of lattice-ordered abelian groups" (en Russe), *Algebra i Logica* **5** (3) (1966), pp. 71–76.

[**KhKo**] N. G. Khisamiev *et* A. I. Kokorin, "Elementary classification of lattice-ordered abelian groups with a finite number of filaments" (en Russe), *Algebra i Logika* **5** (1) (1966), pp. 41–50.

[**Kino**] S. Kinoshita, "A solution of a problem of R. Sikorski", *Fundamenta Mathematicæ* **40** (1953), pp. 39–41.

[**Kiss** *et al.*] E. W. Kiss, L. Marki, P. Prohle, *et* W. Tholen, "Categorical algebraic properties. A compendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residual smallness, and injectivity", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **18** (1983), pp. 79–141.

[**Kopp**] S. Koppelberg, "General theory of Boolean Algebras", *in* "Handbook of Boolean Algebras", vol. **1**, pp. 1–307, edited by J. D. Monk with R. Bonnet, Elsevier, Amsterdam, 1989.

[**Kran**] S. G. Krantz, "Glossary of Common Math Terms", *the Mathematical Intelligencer*, vol. **16**, no. 1 (1994), p. 36.

[**Krul**] W. Krull, "Allgemeine Bewertungstheorie", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **167** (1932), pp. 160–196.

[**Kura**] C. Kuratowski, "Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques", *Fundamenta Mathematicæ* **3** (1922), pp. 76–108.

[**Lacz1**] M. Laczkovich, "Closed sets without measurable matching", *Proceedings of the American Mathematical Society* **103** (1988), pp. 894–896.

[**Lacz2**] M. Laczkovich, "Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **404** (1990), pp. 77–117.

[**Lacz3**] M. Laczkovich, "Invariant signed measures and the cancellation law", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 111, Number 2 (February 1991), pp. 421–431.

[**Lacz4**] M. Laczkovich, "Decomposition of sets with small boundary", *Journal of the London Mathematical Society* (2) **46** (1992), pp. 39–57.

[**Lacz5**] M. Laczkovich, "Uniformly spread discrete sets in $\mathbf{R}^d$, *Journal of the London Mathematical Society* (2) **46** (1992), pp. 58–64.

[**Lacz6**] M. Laczkovich, "Paradoxical decompositions using Lipschitz functions", *Real Analysis Exchange* **17** (1991/92), no. 1, pp. 439–444.

[**Lacz7**] M. Laczkovich, "Paradoxical decompositions using Lipschitz functions", *Mathematika* **39** (1992), no. 2, pp. 216–222.

[**Lacz9**] M. Laczkovich, "Recent results in the theory of decomposition of sets (paradoxical decompositions)", *Communication au Congrès Européen de Mathématiques* (1992).

[**Laws**] J. D. Lawson, "Intrinsic topologies in topological lattices and semilattices", *Pacific Journal of Mathematics* **44** (1973), pp. 593–602.

[**LiOS**] J. Lindenstrauss, G. Olsen, *et* Y. Sternfeld, "The Poulsen simplex", *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* 28 (1978), pp. 91–114.

[**Lloy**] J. T. Lloyd, "Lattice Ordered Groups and o-Permutation Groups", PhD thesis, Tulane University, 1964.

[**Lore1**] P. Lorenzen, "Abstrakte Begründung der multiplicativen Idealtheorie", *Mathematische Zeitschrift* **45** (1939), pp. 533–553.

[**Lore2**] P. Lorenzen, "Über halbgeordnete Gruppen", *Archiv Math.* **2** (1949), pp. 66–70.

[**Lore3**] P. Lorenzen, "Über halbgeordnete Gruppen", *Mathematische Zeitschrift* **52** (1950), pp. 483–526.

[**Lux**] W. A. J. Luxemburg, "Reduced products of the real number system", *Applications of model theory to algebra, analysis and probability, Holt, Reinhart and Winston* (1969).

[**LuZa**] W. A. J. Luxemburg *et* A. C. Zaanen, "Riesz spaces I", North Holland, Amsterdam, 1971.

[**Madd1**] J. J. Madden, "Two Methods in the Study of k-Vector Lattices", PhD thesis, Wesleyan University, 1983.

[**Madd2**] J. J. Madden, "ℓ-groups of piecewise linear functions", in W.B. Powell and C. Tsinakis editors, *Ordered Algebraic Structures*, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics* Vol. **99**, M. Dekker, pp. 117–124, 1985.

[**Madd3**] J. J. Madden, "Pierce-Birkhoff rings", *archiv Math.* **53** (1989), pp. 565–570.

[**Madd4**] J. J. Madden, "Vector lattices and a problem in geometry", in J. Martinez editor, *Ordered Algebraic Structures*, pp. 235–245, Carribean Math. Found. Conf. Curacao 1988, Kluwer academic Publ., 1989.

[**Mahé**] L. Mahé, "On the Birkhoff-Pierce conjecture", *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **14** (1984), pp. 983–985.

[**Mans**] R. Mansfield, "The theory of Boolean ultrapowers", *Annals of Mathematical Logic* **2** (1971), pp. 297–323.

[**Mark1**] A. A. Markov, "The unsolvability of certain problems in topology" (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **123** (1958), pp. 978–980.

[**Mark2**] A. A. Markov, "Insolubility of the problem of homeomorphy", (in Russian), in JA.A Todd, editor, *Proc. Intern. Congress of Math., 1958*, pp. 300–306; Cambridge University Press, 1960.

[**Monc**] J. Moncasi, "A regular ring whose K_0 is not a Riesz group", *Communications in Algebra* **13** (1985), pp. 125–133.

[**Monr**] G. P. Monro, "On generic extensions without the axiom of choice", *Journal of Symbolic Logic* **48** no. 1 (March 1983), pp. 39–52.

[**Mosch**] Yiannis N. Moschovakis, "Descriptive Set Theory", Studies in Logic and the foundations of Mathematics, vol. **100**, North-Holland, 1980.

[**Myci1**] J. Mycielski, "The Banach-Tarski paradox for the hyperbolic plane", *Fundamenta Mathematicæ* **132** (1989).

[**Myci2**] J. Mycielski, "Some compactifications of general algebras", *Colloquium Mathematicum* **13** (1964), pp. 1–9.

[**MyRN**] J. Mycielski *et* C. Ryll-Nardzewski, "Equationally compact algebras II", *Fundamenta Mathematicæ* **61** (1968), pp. 271–281.

[**Myer1**] D. Myers, "The Boolean algebras of abelian groups and well-orders", *Journal of Symbolic Logic* **39** (1974), pp. 452–458.

[**Myer2**] D. Myers, "Cylindric algebras of first-order theories", *Transactions of the American Mathematical Society* **216** (1976), pp. 189–202.

[**Myer3**] D. Myers, "Measures on Boolean algebras, orbits in Boolean spaces, and an extension of transcendence rank", *Notices of the American Mathematical Society* **24** (1977), abstract 747-02-4, p. A-447.

[**Myer4**] D. Myers, "Rank diagrams and Boolean algebras", *Journal of Symbolic Logic* **43** (1978), p. 370 (Abstract).

[**Myer5**] D. Myers, "The Boolean algebra of the theory of linear ordres", *Israel Journal of Mathematics* **35** (1980), pp. 234–255.

[**Myer6**] D. Myers, "Lindenbaum-Tarski Algebras", dans *"Handbook of Boolean Algebras"*, vol. **3**, pp. 1167–1196, edité par J. D. Monk avec R. Bonnet, Elsevier, Amsterdam, 1989.

[**Naka**] H. Nakano, "Linear Lattices", Wayne State University Press, Detroit, 1966.

[**Naky**] K. Nakayama, "Note on lattice-ordered groups", *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **18** (1942), pp. 1–4.

[**Nami**] I. Namioka, "Følner's condition for amenable semi-groups", *Mathematica Scandinavica* **15** (1964), pp. 18–28.

[**Ohm**] J. Ohm, "Semi-valuations and groups of divisibility", *Canadian Journal of Mathematics* **21** (1966), pp. 576–591.

[**Ore**] O. Ore, "Theory of non-commutative polynomials", *Annals of Mathematics* **34** (1933), pp. 480–508.

[**Oxto**] J. Oxtoby, "Measure and category", Graduate Texts in Mathematics **2**, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[**Pawl**] J. Pawlikowski, "The Hahn-Banach Theorem implies the Banach-Tarski Paradox", *Fundamenta Mathematicæ* **138** (1991), pp. 20–22.

[**Pinc1**] D. Pincus, "Independence of the Prime Ideal Theorem from the Hahn-Banach Theorem", *Bulletin of the American Mathematical Society* **78** (1972), pp. 766–770.

[**Pinc2**] D. Pincus, "The strength of the Hahn-Banach theorem", *Victoria symposium of Non-Standard Analysis*, Springer Lecture Notes Number **369** (1974), pp. 203–248.

[**Pinc3**] D. Pincus, "Adding dependent choice to the prime ideal theorem", *in* Logic Colloquium 76. Studies in Logic and the foundations of Math. vol. **87**, North-Holland Publishing Company, pp. 547–565, 1977.

[**PiSo**] D. Pincus *et* R. Solovay, "Definability of measures and ultrafilters", *Journal of Symbolic Logic* **42** (1977), Number 2, pp. 179–190.

[**Poul**] E. T. Poulsen, "A simplex with dense extreme points", *Annales de l'Institut Fourier* (Grenoble) **11** (1961), pp. 83–87.

[**BrSh1**] K. P. S. Bhaskara Rao *et* R. M. Shortt, "Separation of points by families of intervals", *Real Analysis Exchange* **16** (1990/91), no. 1, pp. 177–186.

[**BrSh2**] K. P. S. Bhaskara Rao *et* R. M. Shortt, "The dual of a refinement algebra", *Lecture Notes in pure and applied mathematics, General Topology and Applications, 5th North East Conference* (Marcel Dekker), vol. **134** (1991), pp. 335–367.

[**BrSh3**] K. P. S. Bhaskara Rao *et* R. M. Shortt, "Group-valued charges: common extensions and the infinite Chinese remainder property", *Proceedings of the American Mathematical Society* **113** (1991), no. 4, pp. 965–972.

[**BrSh4**] K. P. S. Bhaskara Rao *et* R. M. Shortt, "Weak cardinal algebras", *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 659 (1992), pp. 156–162.

[**BrSh5**] K. P. S. Bhaskara Rao *et* R. M. Shortt, "Extensions of semigroup valued, finitely additive measures", *Semigroup Forum*, vol. 45, no. 1 (1992), pp. 120–128.

[**BrSh6**] K. P. S. Bhaskara Rao *et* R. M. Shortt, "Common extensions of a family of group-valued, finitely additive measures", *Colloquium Mathematicum* **63** (1992), no. 1, pp. 85–88.

[**Rema**] P. S. Rema, "On compact topological lattices", *Mathematica Japonicæ* **9** (1964), no. 2, pp. 93–98.

[**Ribe1**] P. Ribenboim, "Conjonction d'ordres dans les groupes abéliens ordonnés", *An. Acad. Brasil. Ci.* **29** (1957), pp. 201–224.

[**Ribe2**] P. Ribenboim, "Un théorème de réalisation de groupes réticulés", *Pacific Journal of Mathematics* **10** (1960), pp. 305–308.

[**Ribe3**] P. Ribenboim, "Théorie des valuations", *Les presses de l'Université de Montréal*, 2nd edition, Montréal, 1968.

[**Ries1**] F. Riesz, "Sur les fonctions superharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel", *Acta Math.* **48** (1926), pp. 329–343.

[**Ries2**] F. Riesz, "Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires", in *Atti del Cong. Internaz. dei Bologna*, Vol. **3**, pp. 143–148, 1928; *see* also *Oeuvres Complètes*, II, pp. 1097–1102, Budapest, 1960.

[**Ries3**] F. Riesz, "Sur quelques notions fondamentales dans la théorie des opérations linéaires", *Annals of Mathematics* **41** (1940), pp. 174–206.

[**Robi1**] A. Robinson, "Complete theories", Amsterdam (1956).

[**Robi2**] A. Robinson, "Non-Standard Analysis", North-Holland, Amsterdam, 1966.

[**Robi3**] A. Robinson, "A solution to a problem by Erdös–Gillman–Henriksen", in: *Model Theory and Algebra. Selected papers*, vol. **1**, Yale University Press (1979).

[**RoZa**] A. Robinson *et* E. Zakon, "Elementary properties of ordered abelian groups", *Transactions of the American Mathematical Society* **96** (1960), pp. 222–236.

[**Schw**] L. Schwartz, "Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures", Oxford University Press, London, 1973.

[**Schw2**] N. Schwartz, "Real closed rings", in S. Wolfenstein editor, *Algebra and Order*, *Research and Exposition in Mathematics*, Vol. **14**, pp. 175–194, Berlin, 1986, Heldermann Verlag.

[**Schw3**] N. Schwartz, "Epimorphisms of f-rings", in *Ordered Algebraic Structures*, pages 187–195, Carribean Math. Foundation conf. Curacao 1988, Kluwer Acad. Publ., 1989.

[**Schw4**] N. Schwartz, "The basic theory of real closed spaces", *Memoirs of the American Mathematical Society* **77** (397) (1989), vii+122pp..

[**Schw5**] N. Schwartz, "Inverse real closed spaces", *Illinois Journal of Mathematics* **35** (1991), pp. 536–568.

[**Shan**] R. T. Shannon, "Lazard's theorem in algebraic categories", *Algebra Universalis* **4** (1974), pp. 226–228.

[**Shor1**] R. M. Shortt, "Duality for cardinal algebras", *Forum Mathematicum* **2** (1990), pp. 433–450.

[**Shor2**] R. M. Shortt, "Normal subgroups of measurable automorphisms", *Fundamenta Mathematicæ* **135** (1990), no. 3, pp. 177–187.

[**Shor3**] R. M. Shortt, "A theory of integration for cardinal algebras", *Real Analysis Exchange* **16** (1990/91), no. 1, pp. 79–118.

[**ShWe**] R. M. Shortt *et* F. Wehrung, "Common extensions of semigroup-valued charges", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. **187**, no. 1 (October 1, 1994), pp. 235–258.

[**Sier**] W. Sierpinski, "Fonctions additives non-complètement additives et fonctions non-mesurables", *Fundamenta Mathematicæ*, vol. **30** (1938), pp. 96–99.

[**Sik1**] F. Sik, "Über Summen einfach geordneter Gruppen", *Czechoslovak Mathematical Journal* **8** (1953), pp. 22–53.

[**Sik2**] F. Sik, "Über subdirekte Summen geordneter Gruppen", *Czechoslovak Mathematical Journal* **10** (1960), pp. 400–424.

[**Siko1**] R. Sikorski, "A theorem on extensions of homomorphisms", *Annales Polonici Mathematici* **21** (1948), pp. 332–335.

[**Siko2**] R. Sikorski, "Closure homomorphisms and interior mappings", *Fundamenta Mathematicæ* **36** (1949), pp. 165–206.

[**Siko3**] R. Sikorski, "Boolean Algebras", Ergebnisse der Mathematik, Band **25**, Springer-Verlag, 1958.

[**Siko4**] R. Sikorski, "Some applications of interior mappings", *Fundamenta Mathematicæ* **45** (1958), pp. 200–212.

[**Solo**] R. Solovay, "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable", *Annals of Mathematics* **92**, no. 1 (1970), pp. 1–56.

[**Spec**] E. Specker, "Additive Gruppen von Folgen Ganzer Zahlen", *Portugaliæ Mathematica* **9** (1950), pp. 131–140.

[**Stei**] M. Stein, "Groups of piecewise linear homeomorphisms", *Transactions of the American Mathematical Society* **322** (1992), pp. 477–514.

[**Ston**] M. H. Stone, "A general theory of spectra. II", *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **27** (1941), pp. 83–87.

[**Szmi**] W. Szmielew, "Elementary properties of Abelian groups", *Fundamenta Mathematicæ* **41** (1954), pp. 203–271.

[**Tars1**] A. Tarski, "Algebraische Fassung des Maßproblems", *Fundamenta Mathematicæ* **31** (1938), pp. 47–66.

[**Tars2**] A. Tarski, "Cardinal Algebras", New York: Oxford, 1949.

[**Trus1**] J. K. Truss, "Convex sets of cardinals", *Proceedings of the London Mathematical Society* **27** (1973), pp. 577–599.

[**Trus2**] J. K. Truss, "Cancellation laws for surjective cardinals", *Annals of Pure and Applied Logic* **27** (1984), pp. 165–207.

[**Trus3**] J. K. Truss, "The failure of cancellation laws for equidecomposability types", *Canadian Journal of Mathematics*, vol. **XLII**, no. 4 (1990), pp. 590–606.

[**Vino1**] A. A. Vinogradov, "Nelokalnost' klassa rešetočno-uporjadočivaemych assotsiativnych algebr i kolets" (en Russe: "pour les algèbres et les anneaux la propriété d'être réticulable n'est pas locale"), *Sibirsk. Mat. Ž.* **16** (1975), pp. 182–185.

[**Vino2**] Andrei Vinogradov *et* Anatolii Vinogradov, "Nelokalnost' rešetočno-uporjadočivaemych grupp" (en Russe: "La propriété d'un groupe d'être réticulable n'est pas locale"), *Algebra i Logica* **8**, no. 6 (November-December 1969), pp. 636–639. Traduction anglaise dans *Algebra and Logic* **8**, no. 6 (1969), pp. 359–361.

[**VZSi**] J. von zur Gathen *et* M. Sieveking, "A bound on solutions of linear integer equalities and inequalities", *Proceedings of the American Mathematical Society* **72** (1978), pp. 155–158.

[**Wago**] S. Wagon, "The Banach Tarski-paradox", Cambridge University Press, New York, 1985.

[**Wehr1**] F. Wehrung, "Théorème de Hahn-Banach et paradoxes continus et discrets", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 310, série I (1990), pp. 303–306.

[**Wehr2**] F. Wehrung, "Injective positively ordered monoids I", *Journal of Pure and Applied Algebra* **83** (1992), pp. 43–82.

[**Wehr3**] F. Wehrung, "Injective positively ordered monoids II", *Journal of Pure and Applied Algebra* **83** (1992), pp. 83–100.

[**Wehr4**] F. Wehrung, "Metric properties of positively ordered monoids", *Forum Mathematicum* **5** (1993), pp. 183–201.

[**Wehr5**] F. Wehrung, "Boolean universes above Boolean models", *Journal of Symbolic Logic*, vol. **58**, no. 4 (december 1993), pp. 1219–1250.

[**Wehr6**] F. Wehrung, "Restricted injectivity, transfer property and decompositions of separative positively ordered monoids", *Communications in Algebra* **22** (5) (1994), pp. 1747–1781.

[**Wehr7**] F. Wehrung, "Baire paradoxical decompositions need at least 6 pieces", *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. **121**, no. 2 (June 1994), pp. 643–644.

[**Wehr8**] F. Wehrung, "The universal theory of ordered equidecomposability types semigroups", *Canadian Journal of Mathematics* Vol. **46** (5) (1994), pp. 1093–1120.

[**Wehr9**] F. Wehrung, "Treillis bi-locaux équationnellement compacts", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, t. **318**, Série I (1994), pp. 5–9.

[**Wehr10**] F. Wehrung, "Bounded countable atomic compactness of ordered groups", *Fundamenta Mathematicæ* **148** (1995), pp. 101–116.

[**Wehr11**] F. Wehrung, "Equational compactness of bi-frames and projection algebras", *Algebra Universalis* **33** (1995), pp. 478–515.

[**Wehr12**] F. Wehrung, "A compactness property of Dedekind σ-complete f-rings", *Algebra Universalis* **36** (1996), pp. 511–522.

[**Wehr13**] F. Wehrung, "Monoids of intervals of ordered abelian groups", *Journal of Algebra* **182** (1996), pp. 287–328.

[**Wehr14**] F. Wehrung, "Tensor products of structures with interpolation", *Pacific Journal of Mathematics* **176**, no. 1 (1996), pp. 267–285.

[**Wehr15**] F. Wehrung, "Monotone σ-complete groups with unbounded refinement", *Fundamenta Mathematicæ* **151** (1996), pp. 177–187.

[**Wehr16**] F. Wehrung, "Norm-closed intervals of norm-complete ordered abelian groups", *Positivity* **1** (1997), pp. 271–290.

[**Wehr17**] F. Wehrung, "Embedding simple commutative monoids into simple refinement monoids", *Semigroup Forum* **56** (1998), pp. 104–129.

[**Wehr18**] F. Wehrung, "Non-measurability properties of interpolation vector spaces", *Israel Journal of Mathematics* **103** (1998), pp. 177–206.

[**Wehr19**] F. Wehrung, "A uniform refinement property of certain congruence lattices", *Proceedings of the American Mathematical Society* **127**, no. 2 (1999), pp. 363–370.

[**Wein1**] E. C. Weinberg, "Completely distributive lattice-ordered groups", *Pacific Journal of Mathematics* **12** (1962), pp. 1131–1137.

[**Wein2**] E. C. Weinberg, "Free lattice-ordered abelian groups", *Mathematische Annalen* **151** (1963), pp. 187–199.

[**Wein3**] E. C. Weinberg, "Free lattice-ordered abelian groups II", *Mathematische Annalen* **159** (1965), pp. 217–222.

[**Weis**] V. Weispfennig, "The complexity of the word problem in abelian ℓ-groups", *Theoretical Computer Science* **48** (1986), pp. 127–132.

[**Zaan**] A. C. Zaanen, "Riesz spaces II", Vol. **30** of *North Holland Math. Library*, North Holland Publ. Company, 1983, xii+720pp..

[**Zerm**] E. Zermelo, "Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen* **59** (1904), pp. 514–516.

[**Zorn**] M. Zorn, "A remark on method in transfinite algebra", *Bulletin of the American Mathematical Society* **41** (1935), pp. 667–670.

[**Zyle**] V. B. Zylev, "Equicomposability of equicomplementable polyhedra", *Sov. Math. Doklady* **161** (1965), pp. 453–455.