Treillis distributifs de congruences d'algèbres générales

Friedrich Wehrung

Université de Caen
LMNO, UMR 6139
Département de Mathématiques
14032 Caen cedex
E-mail: wehrung@math.unicaen.fr
URL: http://www.math.unicaen.fr/˜wehrung

Strasbourg, 13 février 2009

Demi-treillis

- Un demi-treillis est un demi-groupe commutatif idempotent, c.à.d. $(S,+)$, avec $S \neq \varnothing$ et

$$(x+y)+z = x+(y+z)\,, \quad x+y = y+x\,, \quad x+x = x\,.$$

Demi-treillis

- Un demi-treillis est un demi-groupe commutatif idempotent, c.à.d. $(S,+)$, avec $S \neq \varnothing$ et

$$(x+y)+z = x+(y+z)\,, \quad x+y = y+x\,, \quad x+x = x\,.$$

- Sup-demi-treillis: $(S,\vee,\leq)$, avec $(S,\vee)$ demi-treillis, $\leq$ relation d'ordre sur S, et

$$x \leq y \iff x \vee y = y\,.$$

Demi-treillis

- Un demi-treillis est un demi-groupe commutatif idempotent, c.à.d. $(S, +)$, avec $S \neq \varnothing$ et

$$(x+y)+z = x+(y+z)\,, \quad x+y = y+x\,, \quad x+x = x\,.$$

- Sup-demi-treillis: $(S, \vee, \leq)$, avec $(S, \vee)$ demi-treillis, $\leq$ relation d'ordre sur S, et

$$x \leq y \iff x \vee y = y\,.$$

- Inf-demi-treillis définis “dualement”: $(S, \wedge, \leq)$, avec $(S, \wedge)$ demi-treillis, $\leq$ relation d'ordre sur S, et

$$x \leq y \iff x \wedge y = x\,.$$

Demi-treillis

- Un demi-treillis est un demi-groupe commutatif idempotent, c.à.d. $(S, +)$, avec $S \neq \varnothing$ et

$$(x+y)+z = x+(y+z)\,, \quad x+y = y+x\,, \quad x+x = x\,.$$

- Sup-demi-treillis: $(S, \vee, \leq)$, avec $(S, \vee)$ demi-treillis, $\leq$ relation d'ordre sur S, et

$$x \leq y \iff x \vee y = y\,.$$

- Inf-demi-treillis définis "dualement": $(S, \wedge, \leq)$, avec $(S, \wedge)$ demi-treillis, $\leq$ relation d'ordre sur S, et

$$x \leq y \iff x \wedge y = x\,.$$

- $(\vee, 0)$-demi-treillis: $(S, \vee, 0, \leq)$, avec $(S, \vee, \leq)$ sup-demi-treillis, $0 \in S$ élément neutre pour $\vee$. (Donc 0 est le plus petit élément de S pour $\leq$.)

Treillis

- Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire $\{x, y\}$ a une borne supérieure (notée $x \vee y$) et une borne inférieure (notée $x \wedge y$).

Treillis

- Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire $\{x, y\}$ a une borne supérieure (notée $x \vee y$) et une borne inférieure (notée $x \wedge y$).
- Notation: $\bigvee X$ (resp., $\bigwedge X$) est la borne supérieure (resp., inférieure) d'un sous-ensemble X.

Treillis

- Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire $\{x, y\}$ a une borne supérieure (notée $x \vee y$) et une borne inférieure (notée $x \wedge y$).
- Notation: $\bigvee X$ (resp., $\bigwedge X$) est la borne supérieure (resp., inférieure) d'un sous-ensemble X. Un treillis est complet, si tout sous-ensemble admet une borne inférieure (déf. équivalente pour "borne supérieure").

Treillis

- Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire $\{x, y\}$ a une borne supérieure (notée $x \vee y$) et une borne inférieure (notée $x \wedge y$).
- Notation: $\bigvee X$ (resp., $\bigwedge X$) est la borne supérieure (resp., inférieure) d'un sous-ensemble X. Un treillis est complet, si tout sous-ensemble admet une borne inférieure (déf. équivalente pour "borne supérieure").
- Si $(L, \leq, \vee, \wedge)$ est un treillis, alors $(L, \geq, \wedge, \vee)$ est aussi un treillis (le treillis opposé de L).

Treillis

- Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire $\{x, y\}$ a une borne supérieure (notée $x \vee y$) et une borne inférieure (notée $x \wedge y$).
- Notation: $\bigvee X$ (resp., $\bigwedge X$) est la borne supérieure (resp., inférieure) d'un sous-ensemble X. Un treillis est complet, si tout sous-ensemble admet une borne inférieure (déf. équivalente pour "borne supérieure").
- Si $(L, \leq, \vee, \wedge)$ est un treillis, alors $(L, \geq, \wedge, \vee)$ est aussi un treillis (le treillis opposé de L).
- Les opérations $\vee$ et $\wedge$ satisfont alors toutes les identités disant que $(L, \vee)$ et $(L, \wedge)$ sont des demi-treillis, plus les "identités d'absorption" $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$.

Treillis (suite)

- La classe de tous les treillis est une classe équationnelle (on dit aussi variété), décrite par les identités suivantes:

$$\begin{aligned}
(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)\,; &\quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)\,;\\
x \vee y = y \vee x\,; &\quad x \wedge y = y \wedge x\,;\\
x \vee x = x\,; &\quad x \wedge x = x\,;\\
x \wedge (x \vee y) = x\,; &\quad x \vee (x \wedge y) = x\,.
\end{aligned}$$

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$):

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$): décidable en temps polynomial.

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$): décidable en temps polynomial.
- Identité de distributivité: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$): décidable en temps polynomial.
- Identité de distributivité: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- Problème des mots dans la classe des treillis distributifs:

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$): décidable en temps polynomial.
- Identité de distributivité: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- Problème des mots dans la classe des treillis distributifs: décidable, **NP**-complet.

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$): décidable en temps polynomial.
- Identité de distributivité: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- Problème des mots dans la classe des treillis distributifs: décidable, **NP**-complet.
- Identité de modularité: $x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$): décidable en temps polynomial.
- Identité de distributivité: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- Problème des mots dans la classe des treillis distributifs: décidable, **NP**-complet.
- Identité de modularité:
  $x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- Problème des mots dans la classe des treillis modulaires:

Identités de treillis

- Problème des mots dans la classe de tous les treillis (langage: $(\vee, \wedge)$): décidable en temps polynomial.
- Identité de distributivité: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- Problème des mots dans la classe des treillis distributifs: décidable, **NP**-complet.
- Identité de modularité:
$x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- Problème des mots dans la classe des treillis modulaires: indécidable (Freese 1980 pour 5 variables, puis Herrmann 1983 pour 4 variables).

Variety is the spice of life

Une variété est la classe de toutes les structures (ici, treillis) qui satisfont un ensemble donné d'identités.

Variety is the spice of life

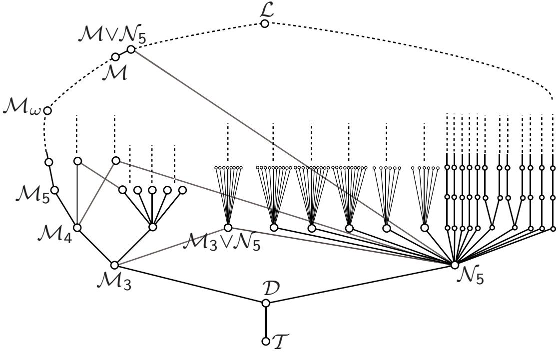
Une variété est la classe de toutes les structures (ici, treillis) qui satisfont un ensemble donné d'identités. Par exemple, $\mathcal{L}$ est la variété de tous les treillis, $\mathcal{M}$ est la variété de tous les treillis modulaires, $\mathcal{N}_5$ est la variété engendrée par le treillis non-modulaire à 5 éléments N_5,...

Variety is the spice of life

Une variété est la classe de toutes les structures (ici, treillis) qui satisfont un ensemble donné d'identités. Par exemple, $\mathcal{L}$ est la variété de tous les treillis, $\mathcal{M}$ est la variété de tous les treillis modulaires, $\mathcal{N}_5$ est la variété engendrée par le treillis non-modulaire à 5 éléments N_5,... Image partielle du treillis des variétés de treillis:

Variety is the spice of life

Une variété est la classe de toutes les structures (ici, treillis) qui satisfont un ensemble donné d'identités. Par exemple, $\mathcal{L}$ est la variété de tous les treillis, $\mathcal{M}$ est la variété de tous les treillis modulaires, $\mathcal{N}_5$ est la variété engendrée par le treillis non-modulaire à 5 éléments N_5,... Image partielle du treillis des variétés de treillis:



Exemples

- L'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des sous-ensembles d'un ensemble X, muni de $\subseteq$, est un treillis distributif.

Exemples

- L'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des sous-ensembles d'un ensemble X, muni de $\subseteq$, est un treillis distributif.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} M$ des sous-modules d'un module M, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.

Exemples

- L'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des sous-ensembles d'un ensemble X, muni de $\subseteq$, est un treillis distributif.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} M$ des sous-modules d'un module M, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.
- L'ensemble $\operatorname{NSub} G$ des sous-groupes distingués d'un groupe G, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.

Exemples

- L'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des sous-ensembles d'un ensemble X, muni de $\subseteq$, est un treillis distributif.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} M$ des sous-modules d'un module M, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.
- L'ensemble $\operatorname{NSub} G$ des sous-groupes distingués d'un groupe G, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} G$ des sous-groupes d'un groupe G, muni de $\subseteq$, est un treillis.

Exemples

- L'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des sous-ensembles d'un ensemble X, muni de $\subseteq$, est un treillis distributif.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} M$ des sous-modules d'un module M, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.
- L'ensemble $\operatorname{NSub} G$ des sous-groupes distingués d'un groupe G, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} G$ des sous-groupes d'un groupe G, muni de $\subseteq$, est un treillis.
- Pour une permutation σ de $\overline{n} := \{1, 2, \dots, n\}$, on pose

$$\operatorname{Inv}(\sigma) := \{(i, j) \in \overline{n} \times \overline{n} \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Exemples

- L'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des sous-ensembles d'un ensemble X, muni de $\subseteq$, est un treillis distributif.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} M$ des sous-modules d'un module M, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.
- L'ensemble $\operatorname{NSub} G$ des sous-groupes distingués d'un groupe G, muni de $\subseteq$, est un treillis modulaire.
- L'ensemble $\operatorname{Sub} G$ des sous-groupes d'un groupe G, muni de $\subseteq$, est un treillis.
- Pour une permutation σ de $\overline{n} := \{1, 2, \dots, n\}$, on pose

  $$\operatorname{Inv}(\sigma) := \{(i,j) \in \overline{n} \times \overline{n} \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

  L'ensemble des permutations de $\overline{n}$, muni de la relation d'ordre définie par

  $$\sigma \leq \tau \iff \operatorname{Inv}(\sigma) \subseteq \operatorname{Inv}(\tau),$$

  est un treillis (permutoèdre d'ordre n).

Algèbres, congruences

- Une algèbre est un ensemble non vide A, muni d'une famille d'applications $A^n \to A$, n variable (pour $n = 0$, on parle de constantes), appelées lois fondamentales.

Algèbres, congruences

- Une algèbre est un ensemble non vide A, muni d'une famille d'applications $A^n \to A$, n variable (pour $n = 0$, on parle de constantes), appelées lois fondamentales.
- Groupes, treillis, espaces vectoriels, anneaux, modules, ..., sont des algèbres.

Algèbres, congruences

- Une algèbre est un ensemble non vide A, muni d'une famille d'applications $A^n \to A$, n variable (pour $n = 0$, on parle de constantes), appelées lois fondamentales.
- Groupes, treillis, espaces vectoriels, anneaux, modules, ..., sont des algèbres.
- Une sous-algèbre d'une algèbre A est un sous-ensemble non vide de A, stable par les lois fondamentales de A.

Algèbres, congruences

- Une algèbre est un ensemble non vide A, muni d'une famille d'applications $A^n \to A$, n variable (pour $n = 0$, on parle de constantes), appelées lois fondamentales.
- Groupes, treillis, espaces vectoriels, anneaux, modules, ..., sont des algèbres.
- Une sous-algèbre d'une algèbre A est un sous-ensemble non vide de A, stable par les lois fondamentales de A.
- Une congruence d'une algèbre A est une relation d'équivalence sur A qui est compatible avec les lois fondamentales de A, c.à.d. qui est une sous-algèbre de $A \times A$.

Algèbres, congruences

- Une algèbre est un ensemble non vide A, muni d'une famille d'applications $A^n \to A$, n variable (pour $n = 0$, on parle de constantes), appelées lois fondamentales.
- Groupes, treillis, espaces vectoriels, anneaux, modules, ..., sont des algèbres.
- Une sous-algèbre d'une algèbre A est un sous-ensemble non vide de A, stable par les lois fondamentales de A.
- Une congruence d'une algèbre A est une relation d'équivalence sur A qui est compatible avec les lois fondamentales de A, c.à.d. qui est une sous-algèbre de $A \times A$.
- Congruences d'un groupe G $\leftrightharpoons$ sous-groupes distingués de G. Congruences d'un module M $\leftrightharpoons$ sous-modules de M.

Treillis algébriques

- Un élément a dans un treillis L est compact, si pour toute partie X de L, $a \leq \bigvee X$ implique l'existence d'une partie finie $Y \subseteq X$ telle que $a \leq \bigvee Y$.

Treillis algébriques

- Un élément a dans un treillis L est compact, si pour toute partie X de L, $a \leq \bigvee X$ implique l'existence d'une partie finie $Y \subseteq X$ telle que $a \leq \bigvee Y$.
- Un treillis L est algébrique, si L est complet et tout élément de A est une borne supérieure d'éléments compacts de L.

Treillis algébriques

- Un élément a dans un treillis L est compact, si pour toute partie X de L, $a \leq \bigvee X$ implique l'existence d'une partie finie $Y \subseteq X$ telle que $a \leq \bigvee Y$.
- Un treillis L est algébrique, si L est complet et tout élément de A est une borne supérieure d'éléments compacts de L.
- Le treillis $\operatorname{Con} A$ de toutes les congruences d'une algèbre A (avec $\subseteq$) est algébrique (Birkhoff et Frink 1948).

Treillis algébriques

- Un élément a dans un treillis L est compact, si pour toute partie X de L, $a \leq \bigvee X$ implique l'existence d'une partie finie $Y \subseteq X$ telle que $a \leq \bigvee Y$.
- Un treillis L est algébrique, si L est complet et tout élément de A est une borne supérieure d'éléments compacts de L.
- Le treillis $\operatorname{Con} A$ de toutes les congruences d'une algèbre A (avec $\subseteq$) est algébrique (Birkhoff et Frink 1948). Tout treillis algébrique est de cette forme (Grätzer et Schmidt 1963).

Treillis algébriques

- Un élément a dans un treillis L est compact, si pour toute partie X de L, $a \leq \bigvee X$ implique l'existence d'une partie finie $Y \subseteq X$ telle que $a \leq \bigvee Y$.
- Un treillis L est algébrique, si L est complet et tout élément de A est une borne supérieure d'éléments compacts de L.
- Le treillis $\operatorname{Con} A$ de toutes les congruences d'une algèbre A (avec $\subseteq$) est algébrique (Birkhoff et Frink 1948). Tout treillis algébrique est de cette forme (Grätzer et Schmidt 1963).
- Le treillis $\operatorname{Con} L$ de toutes les congruences d'un treillis L est distributif (Funayama et Nakayama 1942).

Congruences compactes

- Pour une algèbre A, la borne inférieure et la borne supérieure dans $\operatorname{Con} A$ sont données par

$$\bigwedge(\theta_i \mid i \in I) = \bigcap(\theta_i \mid i \in I)\,,$$

$$\bigvee(\theta_i \mid i \in I) = \text{congruence de } A \text{ engendrée par } \bigcup(\theta_i \mid i \in I)\,.$$

- Pour une algèbre A, la borne inférieure et la borne supérieure dans $\operatorname{Con} A$ sont données par

$$\bigwedge(\theta_i \mid i \in I) = \bigcap(\theta_i \mid i \in I)\,,$$
$$\bigvee(\theta_i \mid i \in I) = \text{congruence de } A \text{ engendrée par } \bigcup(\theta_i \mid i \in I)\,.$$

- Pour $x, y \in A$, on note

$$\operatorname{con}_A(x, y) := \text{plus petite congruence } \theta \text{ de } A \text{ telle que } (x, y) \in \theta$$

(congruence principale)

Congruences compactes (suite)

- Une congruence de A est finiment engendrée, si elle est de la forme $\mathrm{con}_A(x_1, y_1) \vee \cdots \vee \mathrm{con}_A(x_n, y_n)$.

Congruences compactes (suite)

- Une congruence de A est finiment engendrée, si elle est de la forme $\mathrm{con}_A(x_1, y_1) \vee \cdots \vee \mathrm{con}_A(x_n, y_n)$.
- Une congruence de A est *finiment engendrée* ssi elle est un élément *compact* du treillis $\mathrm{Con}\, A$.

Congruences compactes (suite)

- Une congruence de A est finiment engendrée, si elle est de la forme $\mathrm{con}_A(x_1, y_1) \vee \cdots \vee \mathrm{con}_A(x_n, y_n)$.
- Une congruence de A est *finiment engendrée* ssi elle est un élément *compact* du treillis $\mathrm{Con}\, A$.
- L'ensemble $\mathrm{Con_c}\, A$ des congruences compactes de A est un $(\vee, 0)$-sous-demi-treillis de $\mathrm{Con}\, A$.

Congruences compactes (suite)

- Une congruence de A est finiment engendrée, si elle est de la forme $\mathrm{con}_A(x_1, y_1) \vee \cdots \vee \mathrm{con}_A(x_n, y_n)$.
- Une congruence de A est *finiment engendrée* ssi elle est un élément *compact* du treillis $\mathrm{Con}\, A$.
- L'ensemble $\mathrm{Con_c}\, A$ des congruences compactes de A est un $(\vee, 0)$-sous-demi-treillis de $\mathrm{Con}\, A$.
- $\mathrm{Con_c}\, A \leftrightharpoons \mathrm{Con}\, A$: en fait, $\mathrm{Con}\, A$ est isomorphe au treillis des idéaux de $\mathrm{Con_c}\, A$.

Question générale

Problèmes de représentation de treillis algébriques distributifs

Question générale

On dispose d'une classe $\mathbf{C}$ d'algèbres. Quand tout treillis algébrique distributif est-il isomorphe à $\operatorname{Con} A$, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Problèmes de représentation de treillis algébriques distributifs

Question générale

On dispose d'une classe $\mathbf{C}$ d'algèbres. Quand tout treillis algébrique distributif est-il isomorphe à $\operatorname{Con} A$, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Jusqu'à récemment, ouvert même pour les groupes et modules.

Problèmes de représentation de treillis algébriques distributifs

Question générale

On dispose d'une classe **C** d'algèbres. Quand tout treillis algébrique distributif est-il isomorphe à Con A, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Jusqu'à récemment, ouvert même pour les groupes et modules. Instance la plus connue du problème ci-dessus: CLP ("Congruence Lattice Problem"), pour **C** :=classe de tous les treillis:

Problèmes de représentation de treillis algébriques distributifs

Question générale

On dispose d'une classe **C** d'algèbres. Quand tout treillis algébrique distributif est-il isomorphe à Con A, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Jusqu'à récemment, ouvert même pour les groupes et modules. Instance la plus connue du problème ci-dessus: CLP ("Congruence Lattice Problem"), pour **C** :=classe de tous les treillis:

Problème CLP (Dilworth, années 40)

Problèmes de représentation de treillis algébriques distributifs

Question générale

On dispose d'une classe $\mathbf{C}$ d'algèbres. Quand tout treillis algébrique distributif est-il isomorphe à Con A, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Jusqu'à récemment, ouvert même pour les groupes et modules. Instance la plus connue du problème ci-dessus: CLP ("Congruence Lattice Problem"), pour $\mathbf{C}$:=classe de tous les treillis:

Problème CLP (Dilworth, années 40)

Tout treillis algébrique distributif est-il isomorphe à Con L, pour un treillis L?

Demi-treillis distributifs

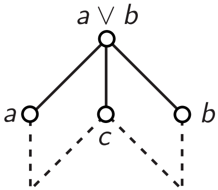
Definition

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis S est distributif, si pour tous $a, b, c \in S$ tels que $c \leq a \vee b$, il existe $x \leq a$ et $y \leq b$ tels que $c = x \vee y$.

Demi-treillis distributifs

Definition

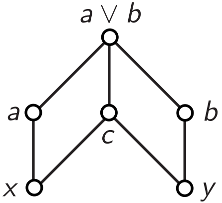
Un $(\vee, 0)$-demi-treillis S est distributif, si pour tous $a, b, c \in S$ tels que $c \leq a \vee b$, il existe $x \leq a$ et $y \leq b$ tels que $c = x \vee y$.



Demi-treillis distributifs

Definition

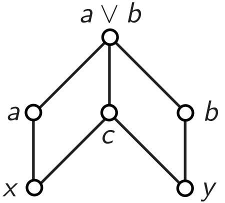
Un $(\vee, 0)$-demi-treillis S est distributif, si pour tous $a, b, c \in S$ tels que $c \leq a \vee b$, il existe $x \leq a$ et $y \leq b$ tels que $c = x \vee y$.



Demi-treillis distributifs

Definition

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis S est distributif, si pour tous $a, b, c \in S$ tels que $c \leq a \vee b$, il existe $x \leq a$ et $y \leq b$ tels que $c = x \vee y$.



De façon équivalente, le treillis des idéaux de S est distributif.

Formulation des problèmes en termes de demi-treillis

Question générale (*bis*)

Formulation des problèmes en termes de demi-treillis

Question générale (*bis*)

On dispose d'une classe $\mathbf{C}$ d'algèbres. Quand tout $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif est-il isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, A$, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Formulation des problèmes en termes de demi-treillis

Question générale (*bis*)

On dispose d'une classe **C** d'algèbres. Quand tout $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif est-il isomorphe à $\operatorname{Con_c} A$, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Formulation en termes de demi-treillis de CLP

Formulation des problèmes en termes de demi-treillis

Question générale (*bis*)

On dispose d'une classe $\mathbf{C}$ d'algèbres. Quand tout $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif est-il isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, A$, pour une algèbre $A \in \mathbf{C}$?

Formulation en termes de demi-treillis de CLP

Tout $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif est-il isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, L$, pour un treillis L?

Algèbres à congruences permutables

- Pour des relations binaires α et β sur un ensemble A, on pose

$$\alpha\circ\beta := \{(x,y) \in A\times A \mid (\exists z \in A)((x,z) \in \alpha \text{ et } (z,y) \in \beta)\}\,.$$

Algèbres à congruences permutables

- Pour des relations binaires α et β sur un ensemble A, on pose

$$\alpha \circ \beta := \{(x,y) \in A \times A \mid (\exists z \in A)((x,z) \in \alpha \text{ et } (z,y) \in \beta)\}\,.$$

- Des congruences α et β d'une algèbre A permutent, si $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. (Dans ce cas $\alpha \circ \beta$ est aussi une congruence de A, et $\alpha \vee \beta = \alpha \circ \beta$.)

Algèbres à congruences permutables

- Pour des relations binaires α et β sur un ensemble A, on pose

$$\alpha \circ \beta := \{(x, y) \in A \times A \mid (\exists z \in A)((x, z) \in \alpha \text{ et } (z, y) \in \beta)\} .$$

- Des congruences α et β d'une algèbre A permutent, si $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. (Dans ce cas $\alpha \circ \beta$ est aussi une congruence de A, et $\alpha \vee \beta = \alpha \circ \beta$.) On dit que A est congruence-permutable, si deux congruences quelconques de A permutent.

Exemples

- Tout groupe est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ sous-groupes distingués; $HK = KH$ pour H, K sous-groupes distingués de G). Se généralise à toute boucle.

Exemples

- Tout groupe est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ sous-groupes distingués; $HK = KH$ pour H, K sous-groupes distingués de G). Se généralise à toute boucle.
- Tout module est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ sous-modules; $A + B = B + A$ pour des sous-modules A et B de M).)

Exemples

- Tout groupe est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ sous-groupes distingués; $HK = KH$ pour H, K sous-groupes distingués de G). Se généralise à toute boucle.
- Tout module est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ sous-modules; $A + B = B + A$ pour des sous-modules A et B de M).)
- Tout groupe réticulé est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ ℓ-sous-groupes convexes distingués.)

Exemples

- Tout groupe est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ sous-groupes distingués; $HK = KH$ pour H, K sous-groupes distingués de G). Se généralise à toute boucle.
- Tout module est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ sous-modules; $A + B = B + A$ pour des sous-modules A et B de M).)
- Tout groupe réticulé est congruence-permutable. (Congruences $\leftrightharpoons$ ℓ-sous-groupes convexes distingués.)
- Mais la chaîne à trois éléments est un treillis non congruence-permutable.

Propriété de raffinement uniforme PRU

Propriété de raffinement uniforme PRU

On dit qu'un $(\vee, 0)$-demi-treillis S satisfait PRU, si pour tout $e \in S$, pour tout ensemble I et pour toutes familles $(a_i \mid i \in I)$ et $(b_i \mid i \in I)$ d'éléments de S telles que $e \leq a_i \vee b_i$ pour tout $i \in I$,

Propriété de raffinement uniforme PRU

On dit qu'un $(\vee, 0)$-demi-treillis S satisfait PRU, si pour tout $e \in S$, pour tout ensemble I et pour toutes familles $(a_i \mid i \in I)$ et $(b_i \mid i \in I)$ d'éléments de S telles que $e \leq a_i \vee b_i$ pour tout $i \in I$, il existe une famille $(c_{i,j} \mid (i,j) \in I \times I)$ telle que

Structure de $\mathrm{Con}_c\, A$ pour A congruence-permutable

Propriété de raffinement uniforme PRU

On dit qu'un $(\vee, 0)$-demi-treillis S satisfait PRU, si pour tout $e \in S$, pour tout ensemble I et pour toutes familles $(a_i \mid i \in I)$ et $(b_i \mid i \in I)$ d'éléments de S telles que $e \leq a_i \vee b_i$ pour tout $i \in I$, il existe une famille $(c_{i,j} \mid (i,j) \in I \times I)$ telle que

- $c_{i,j} \leq a_i \vee a_j$ et $c_{i,j} \leq b_i \vee b_j$, pour tous $i, j \in I$.
- $e \leq a_j \vee b_i \vee c_{i,j}$, pour tous $i, j \in I$.
- $c_{i,k} \leq c_{i,j} \vee c_{j,k}$, pour tous $i, j, k \in I$.

Structure de $\mathrm{Con_c}\, A$ pour A congruence-permutable (2)

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

Structure de $\operatorname{Con_c} A$ pour A congruence-permutable (2)

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

Soit A une algèbre congruence-permutable. Alors le $(\vee, 0)$-demi-treillis $\operatorname{Con_c} A$ satisfait PRU.

Structure de $\mathrm{Con_c}\,A$ pour A congruence-permutable (2)

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

Soit A une algèbre congruence-permutable. Alors le $(\vee, 0)$-demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,A$ satisfait PRU.

Par suite, si un $(\vee, 0)$-demi-treillis ne satisfait pas PRU, alors il n'est isomorphe à aucun $\mathrm{Con_c}\,A$, pour A congruence-permutable.

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif sans PRU

Notons $\mathrm{F}^{0,1}(X)$ le treillis borné libre sur un ensemble X.
Puisque le treillis des congruences d'un treillis est distributif, le demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(X)$ est distributif.

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif sans PRU

Notons $\mathrm{F}^{0,1}(X)$ le treillis borné libre sur un ensemble X. Puisque le treillis des congruences d'un treillis est distributif, le demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(X)$ est distributif.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif sans PRU

Notons $\mathrm{F}^{0,1}(X)$ le treillis borné libre sur un ensemble X.
Puisque le treillis des congruences d'un treillis est distributif, le demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(X)$ est distributif.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

$\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2)$ ne satisfait pas PRU.

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif sans PRU

Notons $\mathrm{F}^{0,1}(X)$ le treillis borné libre sur un ensemble X. Puisque le treillis des congruences d'un treillis est distributif, le demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(X)$ est distributif.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

$\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2)$ ne satisfait pas PRU. Par suite, il n'existe pas d'algèbre congruence-permutable A (donc pas de groupe, pas de module...) telle que $\mathrm{Con}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2) \cong \mathrm{Con}\,A$.

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif sans PRU

Notons $\mathrm{F}^{0,1}(X)$ le treillis borné libre sur un ensemble X. Puisque le treillis des congruences d'un treillis est distributif, le demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(X)$ est distributif.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

$\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2)$ ne satisfait pas PRU. Par suite, il n'existe pas d'algèbre congruence-permutable A (donc pas de groupe, pas de module...) telle que $\mathrm{Con}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2) \cong \mathrm{Con}\,A$.

Ceci résout un problème de E. T. Schmidt datant de 1969.

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif sans PRU

Notons $\mathrm{F}^{0,1}(X)$ le treillis borné libre sur un ensemble X. Puisque le treillis des congruences d'un treillis est distributif, le demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(X)$ est distributif.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

$\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2)$ ne satisfait pas PRU. Par suite, il n'existe pas d'algèbre congruence-permutable A (donc pas de groupe, pas de module...) telle que $\mathrm{Con}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2) \cong \mathrm{Con}\,A$.

Ceci résout un problème de E. T. Schmidt datant de 1969. Le résultat ci-dessus est aussi valable en remplaçant “treillis borné libre” par “treillis libre” (pas forcément meilleur, car $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}(\aleph_2)$ n'a pas de plus grand élément).

Un $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif sans PRU

Notons $\mathrm{F}^{0,1}(X)$ le treillis borné libre sur un ensemble X.
Puisque le treillis des congruences d'un treillis est distributif, le demi-treillis $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(X)$ est distributif.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

$\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2)$ ne satisfait pas PRU. Par suite, il n'existe pas d'algèbre congruence-permutable A (donc pas de groupe, pas de module...) telle que $\mathrm{Con}\,\mathrm{F}^{0,1}(\aleph_2) \cong \mathrm{Con}\,A$.

Ceci résout un problème de E. T. Schmidt datant de 1969.
Le résultat ci-dessus est aussi valable en remplaçant "treillis borné libre" par "treillis libre" (pas forcément meilleur, car $\mathrm{Con_c}\,\mathrm{F}(\aleph_2)$ n'a pas de plus grand élément). De plus, on peut restreindre la structure libre à une quelconque variété non-distributive de treillis.

Optimalité des résultats

La cardinalité $\aleph_2$ est optimale dans les résultats ci-dessus.

Optimalité des résultats

La cardinalité $\aleph_2$ est optimale dans les résultats ci-dessus.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

Optimalité des résultats

La cardinalité $\aleph_2$ est optimale dans les résultats ci-dessus.

Théorème (Růžička, Tůma et W 2007)

Tout $(\vee, 0)$-demi-treillis distributif de cardinal au plus $\aleph_1$ est isomorphe au treillis des sous-groupes distingués d'un groupe localement fini et au treillis des sous-modules d'un module.

Le théorème de l'ensemble libre de Kuratowski

La preuve du contrexemple de cardinal $\aleph_2$ utilise le résultat de combinatoire infinie suivant.

Le théorème de l'ensemble libre de Kuratowski

La preuve du contrexemple de cardinal $\aleph_2$ utilise le résultat de combinatoire infinie suivant. On note

$$[X]^n := \{Y \subseteq X \mid \text{card } Y = n\},$$
$$[X]^{<\omega} := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ est fini}\}.$$

Le théorème de l'ensemble libre de Kuratowski

La preuve du contrexemple de cardinal $\aleph_2$ utilise le résultat de combinatoire infinie suivant. On note

$$[X]^n := \{Y \subseteq X \mid \operatorname{card} Y = n\}\,,$$
$$[X]^{<\omega} := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ est fini}\}\,.$$

Théorème (Kuratowski 1951)

Le théorème de l'ensemble libre de Kuratowski

La preuve du contrexemple de cardinal $\aleph_2$ utilise le résultat de combinatoire infinie suivant. On note

$$[X]^n := \{Y \subseteq X \mid \operatorname{card} Y = n\}\,,$$
$$[X]^{<\omega} := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ est fini}\}\,.$$

Théorème (Kuratowski 1951)

Soit n un entier naturel. Alors un ensemble X est de cardinal au moins $\aleph_n$ si et seulement si pour toute application $F\colon [X]^n \to [X]^{<\omega}$ il existe $H \in [X]^{n+1}$ tel que $x \notin F(H \setminus \{x\})$ pour tout $x \in H$.

Le théorème de l'ensemble libre de Kuratowski

La preuve du contrexemple de cardinal $\aleph_2$ utilise le résultat de combinatoire infinie suivant. On note

$$[X]^n := \{Y \subseteq X \mid \operatorname{card} Y = n\}\,,$$
$$[X]^{<\omega} := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ est fini}\}\,.$$

Théorème (Kuratowski 1951)

Soit n un entier naturel. Alors un ensemble X est de cardinal au moins $\aleph_n$ si et seulement si pour toute application $F\colon [X]^n \to [X]^{<\omega}$ il existe $H \in [X]^{n+1}$ tel que $x \notin F(H \setminus \{x\})$ pour tout $x \in H$.

Pour $n = 2$, cela donne que $\operatorname{card} X \geq \aleph_2$ ssi pour toute application $F\colon [X]^2 \to [X]^{<\omega}$ il existe $a, b, c \in X$ distincts tels que $a \notin F(\{b, c\})$, $b \notin F(\{a, c\})$ et $c \notin F(\{a, b\})$.

À l'origine...

Premier problème de ce type résolu en 1998, en utilisant le théorème de Kuratowski pour $n = 2$.

À l'origine…

Premier problème de ce type résolu en 1998, en utilisant le théorème de Kuratowski pour $n = 2$. Un groupe de dimension est un groupe (partiellement) ordonné qui est une limite inductive de groupes ordonnés de la forme $\mathbb{Z}^n$.

À l'origine. . .

Premier problème de ce type résolu en 1998, en utilisant le théorème de Kuratowski pour $n = 2$. Un groupe de dimension est un groupe (partiellement) ordonné qui est une limite inductive de groupes ordonnés de la forme $\mathbb{Z}^n$.

Théorème (W 1998)

À l'origine...

Premier problème de ce type résolu en 1998, en utilisant le théorème de Kuratowski pour $n = 2$. Un groupe de dimension est un groupe (partiellement) ordonné qui est une limite inductive de groupes ordonnés de la forme $\mathbb{Z}^n$.

Théorème (W 1998)

Il existe un groupe de dimension de cardinal $\aleph_2$ qui n'est isomorphe à $K_0(R)$ pour aucun anneau régulier de von Neumann R.

À l'origine. . .

Premier problème de ce type résolu en 1998, en utilisant le théorème de Kuratowski pour $n = 2$. Un groupe de dimension est un groupe (partiellement) ordonné qui est une limite inductive de groupes ordonnés de la forme $\mathbb{Z}^n$.

Théorème (W 1998)

Il existe un groupe de dimension de cardinal $\aleph_2$ qui n'est isomorphe à $K_0(R)$ pour aucun anneau régulier de von Neumann R.

Ceci résout un problème de K. R. Goodearl datant de 1979. En raison de résultats de Goodearl et Handelman (1986), la cardinalité $\aleph_2$ est optimale.

Le contrexemple

Pour un ensemble Ω, on note $\mathcal{G}(\Omega)$ le $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis avec loi ternaire supplémentaire $\bowtie$, librement engendré par des générateurs a_0^ξ et a_1^ξ, pour $\xi \in \Omega$, et les relations

$$\begin{aligned} 1 &= a_0^\xi \vee a_1^\xi\,, \quad \text{pour tout } \xi \in \Omega\,; \\ \bowtie(x, y, z) &\leq x\,, \\ z &= \bowtie(x, y, z) \vee \bowtie(y, x, z)\,, \end{aligned}$$

Le contrexemple

Pour un ensemble Ω, on note $\mathcal{G}(\Omega)$ le $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis avec loi ternaire supplémentaire $\bowtie$, librement engendré par des générateurs a_0^ξ et a_1^ξ, pour $\xi \in \Omega$, et les relations

$$\begin{aligned} 1 &= a_0^\xi \vee a_1^\xi\,, \quad \text{pour tout } \xi \in \Omega\,; \\ \bowtie(x, y, z) &\leq x\,, \\ z &= \bowtie(x, y, z) \vee \bowtie(y, x, z)\,, \end{aligned}$$

pour tous x, y, z tels que $z \leq x \vee y$.

Le contrexemple

Pour un ensemble Ω, on note $\mathcal{G}(\Omega)$ le $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis avec loi ternaire supplémentaire $\bowtie$, librement engendré par des générateurs a_0^ξ et a_1^ξ, pour $\xi \in \Omega$, et les relations

$$\begin{aligned} 1 &= a_0^\xi \vee a_1^\xi\,, \quad \text{pour tout } \xi \in \Omega\,; \\ \bowtie(x, y, z) &\leq x\,, \\ z &= \bowtie(x, y, z) \vee \bowtie(y, x, z)\,, \end{aligned}$$

pour tous x, y, z tels que $z \leq x \vee y$. En particulier, $\mathcal{G}(\Omega)$ est un $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis distributif.

Le contrexemple

Pour un ensemble Ω, on note $\mathcal{G}(\Omega)$ le $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis avec loi ternaire supplémentaire $\bowtie$, librement engendré par des générateurs a_0^ξ et a_1^ξ, pour $\xi \in \Omega$, et les relations

$$\begin{aligned} 1 &= a_0^\xi \vee a_1^\xi\,, \quad \text{pour tout } \xi \in \Omega\,; \\ \bowtie(x, y, z) &\leq x\,, \\ z &= \bowtie(x, y, z) \vee \bowtie(y, x, z)\,, \end{aligned}$$

pour tous x, y, z tels que $z \leq x \vee y$. En particulier, $\mathcal{G}(\Omega)$ est un $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis distributif. De plus, $\Omega \mapsto \mathcal{G}(\Omega)$ se prolonge naturellement en un foncteur des ensembles vers les $(\vee, 0, 1)$-demi-treillis distributifs.

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_{\omega+1}$.

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_{\omega+1}$. Alors $\mathcal{G}(\Omega)$ n'est isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, L$ pour aucun treillis (ou même treillis avec opérateurs) L.

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_{\omega+1}$. Alors $\mathcal{G}(\Omega)$ n'est isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, L$ pour aucun treillis (ou même treillis avec opérateurs) L.

Par suite, le problème CLP de Dilworth a une solution négative.

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_{\omega+1}$. Alors $\mathcal{G}(\Omega)$ n'est isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, L$ pour aucun treillis (ou même treillis avec opérateurs) L.

Par suite, le problème CLP de Dilworth a une solution négative. Résultat optimisé ultérieurement par Pavel Růžička:

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_{\omega+1}$. Alors $\mathcal{G}(\Omega)$ n'est isomorphe à $\operatorname{Con}_{\mathrm{c}} L$ pour aucun treillis (ou même treillis avec opérateurs) L.

Par suite, le problème CLP de Dilworth a une solution négative. Résultat optimisé ultérieurement par Pavel Růžička:

Théorème (Růžička 2008)

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_{\omega+1}$. Alors $\mathcal{G}(\Omega)$ n'est isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, L$ pour aucun treillis (ou même treillis avec opérateurs) L.

Par suite, le problème CLP de Dilworth a une solution négative. Résultat optimisé ultérieurement par Pavel Růžička:

Théorème (Růžička 2008)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_2$.

Le résultat

Comme deux congruences d'un treillis ne sont pas en général permutables, les résultats négatifs obtenus sur les congruences permutables ne s'appliquent pas. Cependant,

Théorème (W 2007)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_{\omega+1}$. Alors $\mathcal{G}(\Omega)$ n'est isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, L$ pour aucun treillis (ou même treillis avec opérateurs) L.

Par suite, le problème CLP de Dilworth a une solution négative. Résultat optimisé ultérieurement par Pavel Růžička:

Théorème (Růžička 2008)

Soit Ω un ensemble de cardinalité au moins $\aleph_2$. Alors $\mathcal{G}(\Omega)$ n'est isomorphe à $\mathrm{Con_c}\, L$ pour aucun treillis (ou même treillis avec opérateurs) L.

Contexte du Lemme d'érosion

- Nous travaillons dans une algèbre L possédant une loi fondamentale $\vee$ de sup-demi-treillis. Donc toute congruence de L est une $\vee$-congruence.

Contexte du Lemme d'érosion

- Nous travaillons dans une algèbre L possédant une loi fondamentale $\vee$ de sup-demi-treillis. Donc toute congruence de L est une $\vee$-congruence.
- Nous posons $U \vee V = \{u \vee v \mid (u, v) \in U \times V\}$, pour tous $U, V \subseteq L$.

Contexte du Lemme d'érosion

- Nous travaillons dans une algèbre L possédant une loi fondamentale $\vee$ de sup-demi-treillis. Donc toute congruence de L est une $\vee$-congruence.
- Nous posons $U \vee V = \{u \vee v \mid (u, v) \in U \times V\}$, pour tous $U, V \subseteq L$.
- Nous notons aussi $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{U} L$ le $(\vee, 0)$-sous-demi-treillis de $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}} L$ engendré par toutes les congruences $\mathrm{con}(u, v)$, où $(u, v) \in U \times U$.

Contexte du Lemme d'érosion

- Nous travaillons dans une algèbre L possédant une loi fondamentale $\vee$ de sup-demi-treillis. Donc toute congruence de L est une $\vee$-congruence.
- Nous posons $U \vee V = \{u \vee v \mid (u, v) \in U \times V\}$, pour tous $U, V \subseteq L$.
- Nous notons aussi $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{U} L$ le $(\vee, 0)$-sous-demi-treillis de $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}} L$ engendré par toutes les congruences $\mathrm{con}(u, v)$, où $(u, v) \in U \times U$. Par suite, si U est fini, alors $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{U} L$ l'est aussi.

Contexte du Lemme d'érosion

- Nous travaillons dans une algèbre L possédant une loi fondamentale $\vee$ de sup-demi-treillis. Donc toute congruence de L est une $\vee$-congruence.
- Nous posons $U \vee V = \{u \vee v \mid (u, v) \in U \times V\}$, pour tous $U, V \subseteq L$.
- Nous notons aussi $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{U} L$ le $(\vee, 0)$-sous-demi-treillis de $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}} L$ engendré par toutes les congruences $\mathrm{con}(u, v)$, où $(u, v) \in U \times U$. Par suite, si U est fini, alors $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{U} L$ l'est aussi.
- Finalement, nous posons $\varepsilon(n) = n \mod 2$, pour tout entier n.

Contexte du Lemme d'érosion

- Nous travaillons dans une algèbre L possédant une loi fondamentale $\vee$ de sup-demi-treillis. Donc toute congruence de L est une $\vee$-congruence.
- Nous posons $U \vee V = \{u \vee v \mid (u, v) \in U \times V\}$, pour tous $U, V \subseteq L$.
- Nous notons aussi $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{U} L$ le $(\vee, 0)$-sous-demi-treillis de $\mathrm{Con_c}\, L$ engendré par toutes les congruences $\mathrm{con}(u, v)$, où $(u, v) \in U \times U$. Par suite, si U est fini, alors $\mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{U} L$ l'est aussi.
- Finalement, nous posons $\varepsilon(n) = n \mod 2$, pour tout entier n. (c.à.d. 0 si n est pair, 1 si n est impair).

Énoncé du Lemme d'érosion

L'énoncé ci-dessous est une forme légèrement plus faible du Lemme d'érosion originel.

Le Lemme d'érosion

Soient $x_0, x_1 \in L$ et soient $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\} \subseteq L$ avec $z_0 \leq x_0, x_1$ et $z_n = 1$ (le plus grand élément de L).

Énoncé du Lemme d'érosion

L'énoncé ci-dessous est une forme légèrement plus faible du Lemme d'érosion originel.

Le Lemme d'érosion

Soient $x_0, x_1 \in L$ et soient $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\} \subseteq L$ avec $z_0 \leq x_0, x_1$ et $z_n = 1$ (le plus grand élément de L). Posons

$$\mathbf{a}_j := \bigvee \left(\mathrm{con}(z_i, z_{i+1}) \mid i \in \varepsilon^{-1}\{j\}\right) \quad (\forall j < 2).$$

Énoncé du Lemme d'érosion

L'énoncé ci-dessous est une forme légèrement plus faible du Lemme d'érosion originel.

Le Lemme d'érosion

Soient $x_0, x_1 \in L$ et soient $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\} \subseteq L$ avec $z_0 \leq x_0, x_1$ et $z_n = 1$ (le plus grand élément de L). Posons

$$\mathbf{a}_j := \bigvee \left(\mathrm{con}(z_i, z_{i+1}) \mid i \in \varepsilon^{-1}\{j\}\right) \quad (\forall j < 2).$$

Alors il existe des congruences $\mathbf{u}_j \in \mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{\{x_j\} \vee Z} L$, pour $j < 2$, telles que

Énoncé du Lemme d'érosion

L'énoncé ci-dessous est une forme légèrement plus faible du Lemme d'érosion originel.

Le Lemme d'érosion

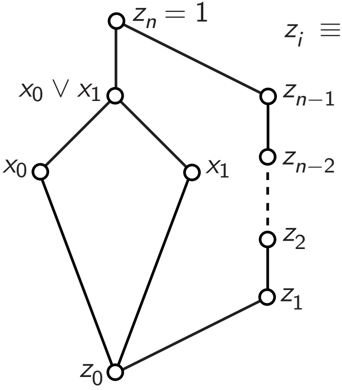
Soient $x_0, x_1 \in L$ et soient $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\} \subseteq L$ avec $z_0 \leq x_0, x_1$ et $z_n = 1$ (le plus grand élément de L). Posons

$$\mathbf{a}_j := \bigvee \left(\mathrm{con}(z_i, z_{i+1}) \mid i \in \varepsilon^{-1}\{j\} \right) \quad (\forall j < 2).$$

Alors il existe des congruences $\mathbf{u}_j \in \mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{\{x_j\} \vee Z} L$, pour $j < 2$, telles que

$$\begin{aligned} x_0 \vee x_1 &\equiv 1 \pmod{\mathbf{u}_0 \vee \mathbf{u}_1}, \\ \mathbf{u}_j &\subseteq \mathbf{a}_j \cap \mathrm{con}(x_j, 1) \quad (\forall j < 2). \end{aligned}$$

Illustration du Lemme d'érosion



$$z_i \equiv z_{i+1} \pmod{\mathbf{a}_{\varepsilon(i)}}$$
$$(\varepsilon(i) = i \mod 2)$$

$$x_j \equiv 1 \pmod{\mathbf{x}_j}$$
$$\mathbf{u}_j \subseteq \mathbf{a}_j \cap \mathbf{x}_j$$
$$x_0 \vee x_1 \equiv 1 \pmod{\mathbf{u}_0 \vee \mathbf{u}_1}$$

avec $\mathbf{u}_j \in \mathrm{Con}_{\mathrm{c}}^{\{x_j\} \vee Z} L$.